LE RATIO COOKE ET LES FONDS PROPRES DES BANQUES

VIVIEN LÉVY-GARBOUA*

La principale modification réglementaire de ces dernières années dans le domaine bancaire aura été l'instauration d'un ratio de fonds propres, le «ratio Cooke», qui s'applique à l'ensemble des banques depuis le 1er Janvier 1993. Ce nouveau ratio, qui impose aux banques de détenir des fonds propres minima en fonction de leurs engagements, et des risques qu'ils sont censés représenter, a été à l'origine de nombreuses analyses et soulève de multiples questions, tant du point de vue de la gestion de la banque que de ses conséquences macro-économiques. L'objet de cet article est de permettre un jugement sur le rôle de cette nouvelle contrainte sur *les choix d'une banque,* à partir d'un modèle simple [1]. Pour y parvenir, ce modèle doit permettre d'évaluer ce que serait la politique de fonds propres de la banque et l'absence de réglementation de manière à disposer d'une situation de référence, par rapport à laquelle on puisse mesurer des écarts. C'est ce modèle qui sera présenté dans une première partie. L'effet du ratio Cooke sur la gestion interne pourra alors être analysé. Quelques conclusions sur les règles pratiques utilisées par les banques ou l'allocation des fonds propres seront dégagées *in fine.*

LE MODÈLE ET SES ENSEIGNEMENTS

Pour étudier l'impact du ratio Cooke sur les choix de la banque, on va d'abord présenter un modèle de banque sans contrainte, avant d'introduire, dans un second temps, le ratio Cooke, puis, en déduire quelques implications générales.

---

* *Directeur général adjoint, BNP.*
J'ai bénéficié des commentaires de A.P. CHIAPPORI, J.C. ROCHET, Y. ULLMO et N.T. VAN. Une suggestion de J.C. ROCHET a en particulier permis de clarifier la dernière partie de cet article.

1 *Ce modèle est voisin de celui utilisé par KOEHN et SANTOMERO (1980), SANTOMERO et KIM (1988) et, plus récemment, par VAN (1991). Enfin, P. ARTUS (1992) a développé une approche très semblable à celle de cet article, dans un travail récent.*

1°/ L'optimum sans contrainte

Pour être en mesure d'aborder les questions d'allocation de ressources de la banque, il faut renoncer à la pratique habituelle qui consiste à regrouper l'ensemble des crédits en un agrégat pour introduire un choix de portefeuille sur les remplois. Afin de conserver un modèle simple et appréhendable intuitivement, en contrepartie de cet enrichissement, on va supposer ici que tous les dépôts sont «coûteux» et disponibles sans limitation au taux de refinancement (r_f) imposé par la Banque Centrale.

Ainsi, le bilan de la banque se présente-t-il ainsi:

Actif	Passif
Crédits plus risqués (L_1)	Fonds propres (W_b)
Crédits moins risqués (L_2)	Refinancement / Dépôts coûteux (F)

La banque utilise ses fonds propres et ses ressources coûteuses pour faire deux types de crédits, dont l'un est plus risqué que l'autre[2]. On peut aussi considérer que la banque a le choix entre des crédits (L_1) et des placements risqués sur le marché (L_2). Pour la commodité du raisonnement, c'est la première interprétation qui sera retenue dans la suite - sauf lorsqu'on examinera la problématique actuelle des banques américaines où les placements en titres d'Etat seront l'un des remplois des banques -. Dans cette modélisation, le «hors-bilan» est négligé. C'est une simplification de plus en plus injustifiée dans le monde actuel, mais, pour la démonstration recherchée, cela ne ferait que compliquer l'analyse sans apporter de changement essentiel à ses conclusions.

Deux hypothèses centrales sont faites:

(H1) - On peut rendre compte du risque avec une analyse «moyenne-variance». Cela signifie que la distribution de probabilité de remboursement du principal et des intérêts de la dette peut être résumée, pour chaque type de crédit, par la moyenne et la variance des variables aléatoires correspondantes. Si r_i est le rendement moyen du crédit $i\ (i = 1,2)$ et σ_i sa variance, alors on exprime le caractère plus "risqué" du crédit de type 1 par l'hypothèse que $\sigma_1 > \sigma_2$ et que, en contrepartie, $r_1 > r_2$. A un risque plus élevé doit correspondre un rendement moyen plus fort.

2 *Toute l'analyse est menée, à titre illustratif, dans l'hypothèse de deux actifs. En réalité, elle pourrait être menée avec n actifs. L'annexe donne une idée du résultat obtenu dans ce cas plus général.*

(H2) - Les banques ont un certain degré d'aversion pour le risque, et elles cherchent à rendre maximale une fonction du rendement des fonds propres. Ce rendement des fonds propres est, bien sûr, incertain dans la mesure où il dépend du remboursement des crédits et du paiement des intérêts prévus par les emprunteurs. Il a donc une espérance, une valeur moyenne que la banque peut escompter, mais aussi un risque que sa valeur réelle diverge de sa valeur moyenne, que l'on peut représenter par sa «variance». L'hypothèse faite est que la banque cherche à rendre maximale l'espérance en tenant compte toutefois du risque pris. Son objectif est donc de maximiser :

Espérance (Rentabilité des fonds propres) - *a* x Variance (Rentabilité des fonds propres)

"*a*" est le coefficient d'aversion pour le risque, qui permet de convertir la variabilité des fonds propres en un équivalent-certain, comparable à la rentabilité moyenne des fonds propres et qui vient l'amputer. $a = 0$ signifierait que la banque est neutre vis-à-vis du risque et considère comme équivalentes deux allocations de ses crédits ayant le même rendement moyen, même si l'une est plus risquée que l'autre [3]. Plus a augmente en revanche, plus la banque est sensible au risque et cherche à le limiter. En général, une banque ne peut se fixer simplement une telle valeur de a. Ce n'est pas la moindre des difficultés pratiques de l'analyse qui va être menée.

Par la suite, cette fonction objectif sera souvent désignée comme la fonction d'utilité de la banque.

A partir de ces deux hypothèses, on peut facilement calculer *(voir annexe)* l'allocation du crédit total (L) entre crédit risqué $(L_1 = xL)$ et moins risqué ($L_2 = (1-x) L$) et le niveau des fonds propres, c'est-à-dire en pratique le ratio des fonds propres au crédit ($k = \frac{W_2}{L}$), qui permette à la banque de rendre optimale l'utilité de la banque. On trouve alors que[4] :

(a) le partage entre les deux types de crédit (plus ou moins risqués) est *indépendant* du degré d'aversion pour le risque de la banque. Il ne dépend que des marges corrigées de la volatilité du rendement de chacun

3 Bien que très souvent utilisée dans la théorie microéconomique des banques, cette hypothèse de neutralité vis-à-vis du risque (a = 0) est particulièrement inadaptée. Elle revient à supposer que la banque est indifférente entre un placement certain à 10 % et un placement très risqué dont le rendement moyen est aussi 10 % (par exemple: avec une probabilité 1 /2, la banque obtient un rendement de 120 %, et avec une probabilité 1/2, elle perd tout ...).

4 Voir l'annexe 1.

des deux actifs ($m_i = \frac{r_i - r_f}{\sigma_i}$) et des variances (σ_i^2) et de la covariance (σ_{12}) des deux crédits;

(b) en revanche, le ratio de fonds propres optimal (k*) est proportionnel au cœfficient d'aversion pour le risque (a) et dépend en outre des mêmes variables : marges corrigées (m_i), variances (σ_i^2) et covariance (σ_{12}) entre les deux rendements;

(c) dans le cas particulier où la covariance entre les rendements des deux actifs est nulle, c'est-à-dire si les risques sont indépendants l'un de l'autre, les expressions sont particulièrement simples : L'actif risqué est choisi en proportion égale à $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$, c'est-à-dire de la marge corrigée du risque (et le moins risqué en proportion $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$ par conséquent) et le ratio de fond propres optimal est $k^* = \frac{a}{m_1 + m_2}$. Plus les marges (corrigées du risque) sont élevées, moins la banque a besoin de se constituer des fonds propres.

On peut illustrer ces résultats à l'aide d'un exemple numérique. Supposons que le taux de refinancement de la banque (r_f) soit de 10 % et que les deux types de crédit aient des rendements moyens de r_1=12 % et r_2=10,5 %. Les écarts types sont proportionnels au taux de refinancement : pour les crédits de type 1, $\sigma_1 = 0{,}2\ r_f$; pour ceux de type 2, $\sigma_2 = 0{,}03\ r_f$. Si r_1 et r_1 suivent une loi normale, cela signifie que les crédits risqués ont 95 % de chances d'avoir un rendement pour la banque entre 8 % et 16 % $(r_1 \pm 2\sigma_1)$ et donc seulement 5 % de chances d'être en dehors de cet intervalle. Les crédits plus sûrs ont 95 % de chances d'être entre 9,9 % et 11,1 %. Alors m_1=50, $m_2 = \frac{5000}{9} \simeq 555$ et si le coefficient de corrélation entre les deux rendements est ρ ($\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$), on trouve que la proportion de crédit risqué est $x^* = \frac{45 - 75\rho}{545 - 375\rho}$

Si ρ = 0 (les deux aléas sont indépendants), x^* = 0,08. Le portefeuille ne comprend que 8 % de l'actif risqué et 92 % de l'actif plus sûr. Si ρ = 0,2, x^* = 0,064. Il n'y a plus que 6,4 % d'actif risqué. Au-delà de ρ = 0,6, il n'y a plus d'actif risqué dans le portefeuille, seulement l'actif «sûr». En sens inverse, si ρ = -1, x^* = 0,146, c'est-à-dire qu'il y a 14,6 % d'actif le plus risqué dans le portefeuille.

On voit bien sur cet exemple numérique l'effet de la diversification du portefeuille. Si elle permet une «opposition de phase» entre les risques des deux actifs, le risque global est amélioré par la diversification et il peut y avoir intérêt à garder davantage de crédit plus risqué. Si, au contraire, cet effet n'existe pas (le coefficient de corrélation entre les deux rendements est positif), on a intérêt à ne faire du crédit que pour autant que le risque est faible, et ce d'autant plus que la corrélation entre les deux profils de rendement des crédits est forte. A partir d'un certain seuil (ρ = 0,6 dans notre exemple), il n'y aura plus d'actif risqué dans le portefeuille.

Quant aux fonds propres, ils seront dans une proportion $k^* = \dfrac{9a(1-\rho^2)}{50(109-75\rho)}$ aux crédits distribués. Si les deux actifs sont indépendants (ρ = 0), $k^* = \dfrac{9a}{5450}$. Pour un coefficient a = 10, k* = 1,6 %. Si les deux actifs sont parfaitement correlés et en opposition de phase (ρ = - 1), k* = 0 : le risque est annulé par la diversification au point que les fonds propres deviennent superflus. Enfin, au point limite où les deux types de crédit coexistent dans le portefeuille (ρ = 0,6), k^*= 1,8 %. Là encore, on voit l'effet de la diversification : plus les deux crédits sont correlés négativement, moins le risque est important et plus le ratio de fonds propres diminue. Bien sûr, au fur et à mesure que a, augmente, k^* augmente en proportion.

2°/ Les choix de la banque avec le ratio Cooke

L'imposition d'une contrainte réglementaire sur les fonds propres oblige la banque à maintenir des fonds propres minima ($w_b \geq kL$) où k est le pourcentage des crédits totaux inclus dans le noyau des fonds propres[5]. Bien sûr, il faut supposer que k est supérieur au k^* calculé précédemment, c'est-à-dire que l'imposition du ratio Cooke est une véritable contrainte pour la banque. Sans quoi, la ratio Cooke ne «mordrait» pas, et les choix de la banque ne seraient pas affectés. Bien sûr, cette situation peut se présenter, en fonction de l'évolution de la demande de crédit (donc de la conjoncture) et de l'attitude plus ou moins prudente de la banque. Il se peut par exemple que certaines banques (on pense à J.P. Morgan) aient naturellement une forte aversion pour le risque (un a très élevé) et souhaitent, même en l'absence de toute contrainte, détenir des fonds propres représentant plus de 4 % des remplois risques[6]. Ce n'est pas

5 *En pratique, la réglementation impose* deux *contraintes, l'une sur le noyau dur des fonds propres, l'autre sur le «tier 2». Pour l'analyse, la distinction est secondaire et nous la négligeons ici.*
6 *Avec l'exemple numérique pris au paragraphe précédent, cela veut dire que* k* ≥ 4 % *; c'est-à-dire que* a *est supérieur à 24.*

l'hypothèse où nous nous plaçons ici puisque l'on supposera désormais que le ratio Cooke est contraignant pour la banque et impose par conséquent un ratio de fonds propres de 4 %.

On va examiner dans un premier temps les conséquences d'un coefficient k uniforme s'appliquant indistinctement aux deux types de crédits (1 et 2). On verra plus loin les effets d'une différenciation du ratio Cooke en fonction des risques.

Dans le même cadre de référence, on peut montrer[7], que *l'imposition d'un ratio de fonds propres uniforme conduit la banque à augmenter la part des crédits les plus risqués* (avec $\sigma > \sigma^2$) et à réduire d'autant la part des crédits les moins risqués. *Ce résultat est indépendant du degré d'aversion pour le risque de la banque.*

Tout se passe comme si un phénomène de compensation se produisait. Le ratio Cooke oblige la banque à être plus exigeante sur les fonds propres. Pour maximiser sa fonction objectif et compenser la perte de rentabilité que cela représente, elle doit prendre davantage de risques sur les crédits, puisque les plus risqués ont les rémunérations les plus fortes. D'où le résultat.

L'augmentation de la part des actifs risqués est en outre proportionnelle à l'écart des rendements ($r_1 - r^2$) entre les deux types de crédit.

Avec les mêmes données numériques que précédemment ($a = 10$), on trouve que $x = \frac{69-60\rho}{409-120\rho}$. Si les deux risques sont indépendants ($\rho = 0$), la proportion d'actif le plus risqué passe de 8 à 16,8 %. Si $\rho = 1$, $x = 3$ % et si $\rho = -1$, $x = 24{,}4$ %. Ici encore, la proportion de l'actif risqué est d'autant plus grande que la covariance entre les deux crédits est fortement négative. Mais, pour une valeur de ce coefficient de corrélation donnée, x est sensiblement plus fort que dans le cas précédent, et ce d'autant plus que l'écart du taux facial $(r_1\text{-}r_2)$ est élevé.

En outre, *la proportion des actifs détenus dépend désormais et du coefficient de fonds propres et du coefficient d'aversion pour le risque (a),* alors qu'elle en était indépendante dans le cas précédent.

Bien sûr, dans la pratique, la pondération des actifs risqués *n'est pas uniforme*. Supposons que, pour chaque type de crédit, il y ait un coefficient de fonds propres spécifique (k_i, $i=1,2$), le crédit le plus risqué imposant une contrainte de fonds propres plus forte ($k_1>k_2$). Il n'est plus possible de déduire alors un résultat aussi simple que dans le cas précédent (où $k_1=k_2$). On peut toutefois chercher à quelle condition l'imposition de k_1 *de* k_2 conduira à une allocation identique à celle obtenue sans contrainte de ratio Cooke. Le résultat est alors le suivant : pour que les

7 *Voir l'annexe 1.*

pondérations Cooke ne distordent pas l'allocation des crédits entre les deux catégories (type 1 plus risqué et type 2 moins risqué), *il faut et il suffit qu'elles soient proportionnelles aux marges d'intérêt* $(r_1\text{-}r_f)$ [8]. Avec les valeurs numériques de notre exemple $r_1\text{-}r_f = 200$ pb et $r_2\text{-}r_f = 50$ pb. Par conséquent, $k_1 = 4k_2$: les fonds propres associés aux crédits de type 1 doivent être quatre fois supérieurs à ceux associés aux crédits de type 2. Ce qui est surprenant dans ce résultat, c'est qu'il est *indépendant de la variablité du risque et ne dépend que de la marge moyenne.*

3°/ Un cas particulier d'actualité: la situation américaine

Le schéma précédent peut être appliqué à la situation particulière où l'un des actifs est *sans risque*. Ce cas est d'autant plus intéressant qu'il correspond à la situation des banques américaines depuis qu'elles bénéficient de la détente des taux courts par le Fed, et qu'elle est à l'origine, dit-on, de l'amplification du «crédit-crunch» qui frappe l'économie américaine. Le problème peut s'énoncer simplement de la manière suivante : puisque les Bons du Trésor américains sont sans risque et qu'ils ne sont pas soumis au ratio Cooke, alors que les crédits sont à la fois risqués et assujettis à la contrainte de fonds propres, pourquoi donc les banques iraient-elles faire du crédit ? C'est ce constat qui a conduit de nombreux économistes à critiquer le choix des pondérations du ratio Cooke [9].

De fait, en supposant que le rendement des Bons du Trésor (r_l) est supérieur au taux de refinancement des banques (r_f), le modèle précédent appliqué au cas considéré conduit au résultat selon lequel les banques ne devraient pas détenir de crédit risqué puisqu'il existe un placement sans risque qui rapporte davantage que le coût des fonds et qui n'exige pas de fonds propres. L'effet de levier est infini et le rendement des fonds propres aussi ! Mais, à bien y réfléchir, cette façon de voir est un peu sommaire. Les obligations d'Etat font courir aux banques un risque de transformation, si le taux à court terme (r_f) se met à varier et devient plus élevé que le taux long (r_l). L'introduction d'un aléa sur le taux court permet de vérifier *(voir annexe 2)* que, dès lors, et même avec l'avantage procuré par la non-imposition d'une contrainte de fonds propres sur les obligations d'Etat, la banque a intérêt à diversifier son portefeuille et à faire des crédits risqués:

- d'autant plus que la variabilité du taux court est élevée,
- d'autant plus que l'écart entre taux long et taux court moyen est faible,
- d'autant plus que la banque *a* de l'aversion pour le risque (*a* élevé).

8 Ce résultat rejoint celui établi par KIM et SANTOMERO (1988).

9 Plusieurs articles du Wall Street Journal s'en sont fait l'écho, par exemple, Steven Lipin et Kenneth H. Bacon "Profit Paradox : U.S. Banks' Earnings Rise Despite Economy, Helpin Them Rebuild", Wall Street Journal du 2.11.1992.

Toutefois, cette fois, la variabilité du crédit (risqué) n'influence pas le choix de la banque. Si l'on reprend le même crédit (de type 1) risqué que précédemment, le même coefficient d'aversion pour le risque, le ratio Cooke de 4 %, et que l'on suppose que l'écart-type sur le taux de refinancement est de 0,01, alors que $r_1 = 11$ %, on trouve que $x = 0,7$, c'est-à-dire que la banque va consacrer 70 % de ses ressources à faire des crédits (risqués) à l'économie et 30 % (seulement) à acheter des obligations d'Etat.

En revanche, la volatilité des taux de refinancement est déterminante: si elle diminue de moitié, alors ce pourcentage de Bons du Trésor passe de 30 à 60 % environ: L'éviction des crédits à l'économie par la dette de l'Etat est alors *très* spectaculaire.

LA PRATIQUE BANCAIRE ET L'ALLOCATION DES FONDS PROPRES

Comment, en pratique, les banques doivent-elles s'y prendre pour rémunérer correctement leurs fonds propres ? Qu'est-ce que l'imposition des ratios Cooke y change ? Quelles règles opérationnelles et décentralisables peut-on (ou doit-on) donner aux exploitants de la banque pour y parvenir ? Toutes ces questions sont aujourd'hui posées dans les banques, et une floraison de consultants est apparue pour recommander des méthodes et proposer des mises en oeuvre, qui consistent le plus souvent à allouer des fonds propres à un crédit ou un «remploi», en fonction de son risque intrinsèque, bien plus que du seul ratio réglementaire. Essayons d'y voir clair sur ce sujet, souvent très confus, à partir du modèle rudimentaire qui précède.

1. La pratique des banques

Depuis l'imposition du ratio Cooke, les banques traduisent le «coût du Cooke» dans leurs prix à partir de deux hypothèses :

- la contrainte du ratio Cooke «serre» $(w_S=kL)$;
- le rendement des fonds propres exigé par les actionnaires ($\rho_f=\hat{\rho}_f$) est donné (par exemple 15 % après impôts).

Sous ces deux hypothèses, le raisonnement *marginal* le plus souvent fait est le suivant. 1 franc de crédit supplémentaire va rapporter r, mais exiger un funding par (1-k) francs au taux r_f et k francs au taux de rendement exigé des actionnaires $\hat{\rho}_f$. Pour que l'opération soit rentable, il faut que $r \geq (1-k)\, r_f + k\rho_f$, soit $r - r_f \geq k(\rho_f - r_f)$. Le «spread» $(r-r_f)$ doit assurer, sur les k% de fonds propres qu'ils exigent, le rendement des fonds propres p_f. Si k = 4%, ρ_f = 15%, r_f = 10 %, $r - r_f$ = 20 pb, le spread doit être supérieur à 20 points de base. Dans le cas où l'on introduit l'impôt sur les sociétés (t) (à 33 %) : $[r-(1-k)r_f]\,(1-t) \geq k\rho_f$; $r-r_f \geq k\,(\frac{\rho_f}{1-t} - r_f)$. Avec les mêmes données, on trouve que le spread doit être supérieur *à 50 pb*. C'est un chiffre couramment admis dans la pratique

On voit aussi que le spread minimum requis varie *en sens inverse du taux de refinancement.*

Taux de refinancement	Spread minimum
5 %	70 pb
8 %	58 pb
10 %	50 pb
12 %	42 pb
15 %	30 pb

Ainsi, dans une situation où le coût marginal des fonds est faible (cas des Etats-Unis par exemple au début de 1993), la marge minimale requise par les banques augmente-t-elle, ce qui renforce encore le phénomène de «credit-crunch». Si, en revanche, le coût de refinancement est élevé (comme en Allemagne ou en France à cette même date), la marge minimale est plus faible.

Le raisonnement qui sous-tend cette pratique des banques fait totalement abstraction du risque. Que devient-il dans un univers risqué, toujours dans l'hypothèse où la banque a comme objectif l'utilité du rendement des fonds propres ?

La première idée qui vient à l'esprit est qu'il faut non seulement compenser le coût des fonds propres requis, mais aussi la prime de risque correspondant au risque de contrepartie pris par la banque. Si ρ_f est l'équivalent-certain du rendement exigé par les actionnaires, cela revient à chercher à quelle condition $u(\rho_f) \geq \rho_f$, ce qui revient à la condition:

$$\underbrace{r - r_f}_{\text{spread requis}} \geq \underbrace{(\frac{\rho_f}{1-t} - r_f).k}_{\text{spread «sans risque»}} + \underbrace{\frac{a\sigma^{2r}(1-t)}{2k}}_{\text{«prime de risque»}}$$

Avec les valeurs numériques prises jusqu'ici (rf=10 %, ρ_f=15%, k=4%, a=10), on trouve qu'il faut ajouter aux 50 pb qui correspondent au spread minimum «sans risque» impliqué par le ratio Cooke, une prime de risque supplémentaire, destinée à compenser le coût du risque pris par la banque et qui vaut 7,5 pb. C'est donc 57,5 pb qui est désormais le spread minimum requis pour tenir compte de la contrainte des fonds propres.

On voit d'ailleurs du même coup que, même en l'absence de ratio Cooke, le même raisonnement permet de calculer le spread qui permet à la fois de justifier une prise de risque et de rémunérer les fonds propres. Ces derniers sont toutefois en général inférieurs s'ils sont choisis de manière optimale[10], si bien que le spread lui-même est plus faible. Avec les mêmes valeurs numériques que précédemment, c'est 4 pb qui seraient requis avec l'actif le moins risqué (crédit de type 2), 27 pb avec le plus risqué (crédit de type 1).

Le problème de cette première approche pour prendre en compte le risque, c'est qu'elle propose un raisonnement très global alors que l'on voudrait un raisonnement marginal. Dans la pratique, le banquier n'est pas confronté au problème de faire des crédits risqués ou non, mais à celui de faire un crédit (risqué bien sûr) *de plus*.

Pour examiner ce problème plus précisément, le modèle de la première partie va nous fournir quelques règles pratiques.

2. Les enseignements du modèle

Revenons donc au modèle de la banque avec deux types de crédit, l'un plus risqué que l'autre. La question *pratique* qui se pose est celle de la marge d'intérêt à partir de laquelle il convient de prêter. C'est donc à un raisonnement *marginal* qu'il faut avoir recours. Mais, dans ce cas, on peut distinguer *deux marges*. L'une «extensive», L'autre «intensive». La première (la marge extensive) intervient lorsqu'on se propose de faire un crédit de type nouveau, c'est-à-dire présentant des caractéristiques de risque et de rendement *différentes* des autres types de crédits figurant dans le portefeuille de la banque. L'autre (la marge intensive) entre en jeu lorsque l'on se propose de faire davantage d'un crédit ayant des caractéristiques *identiques* à celles de l'un des types de crédit déjà en place. Examinons tour à tour chacun des deux cas de figure.

10 *On a donc la même règle que précédemment, avec* k^* *(le ratio de fonds propres optimal) au lieu de* k. *Dans le cas le plus simple considéré ici,* $\frac{a\sigma^2(1-t)}{r-r_f}$, *si bien que la condition finale sur le spread est:*

$$(r-r_f)^2 \geq 2a\sigma^2(1-t)\ [\frac{p_f}{1-t} - r_f]$$

(a) La marge extensive

Il s'agit de voir à quelle condition, partant d'une situation où la banque a (n-1) actifs risqués dans son portefeuille, l'introduction d'un n-ième ayant des caractéristiques précises (celui pour lequel le banquier est interrogé) est avantageuse pour la banque. Dans le cas étudié dans la première partie (n=2), cela revient à se demander à quelle condition les proportions x et $1-x$ des deux types de crédit obtenues par maximisation de la fonction objectif seront positives. Bien sûr, les résultas diffèrent selon que l'on se place dans le cas où le ratio Cooke joue ou pas.

Pas de ratio Cooke

Plaçons nous dans l'hypothèse où $x^* \geq 0$.

La condition pour que $(1-x^*) > 0$ est que $r^2 - r_f \geq \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}(r_1 - r^f)$, sachant que, par ailleurs, $x^* > 0$ exige que :

$$r_1 - r_f \geq \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}(r_2 - r_f)$$

Par conséquent, si les rendements des deux crédits ont une corrélation négative ($\sigma_{12} \leq 0$), $r_2 - r_f \geq 0$ est une condition suffisante pour introduire un deuxième actif. L'effet de diversification qu'apporte le second actif justifie son intégration dans le portefeuille. Dans le cas contraire ($\sigma_{12} \geq 0$), en revanche, il faut que $r_2 - r_f \geq \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}$, $(r_1 - r_f)$

Reprenant le cas numérique déjà utilisé dans ce texte, la condition s'écrit : $r_2 - r_f \geq \frac{1.5\rho.0.015}{10} = 22{,}5\ \rho$ en p.b.

Si $\rho = 0.2$, $r_2 - r_f = 4{,}5$ p.b.

$\rho = 1$, $r_2 - r_f = 22{,}5$ p.b.

Quant à la condition pour que $x^* \geq 0$, elle s'exprime par

$r_1 - r_f \geq \frac{200\rho}{3}(r_2 - r_f)$

Si $r_2 - r_f = 0{,}5\%$, alors $r_2 - r_f \geq \frac{1000\rho}{3}$ en p.b.

Si $\rho = 0{,}2$, $r_1 - r_f = 67$ p.b.

$\rho = i, o,$ $r_1 - r_f = 333$ p.b.

Le fait que $r_1 - r_f = 333$ p.b. > 150 p.b. qui est la marge effective sur ce crédit signifie que, avec cette marge, il ne faut pas introduire ce nouveau type de crédit dans le portefeuille. En sens inverse, pour un spread de 1,5 % sur le crédit risqué, on peut introduire le crédit moins risqué avec un spread de 4,5 pb si $\rho = 2$, et de 22,5 pb si $\rho = 1$. Il y a donc avantage à faire de tels crédits avec une marge de 50 pb.

Avec le ratio Cooke

De la même manière, on peut chercher à quelle condition $x>0$ et $1-x>0$ dans le cas où le ratio Cooke (k) est imposé:

$x > 0$ exige que : $r_1 - r_2 \geq \frac{a}{k}(\sigma_{12} - \sigma_2^2)$

$1-x > 0$ exige que : $r_1 - r_2 \leq \frac{a}{k}(\sigma_1^2 - \sigma_{12})$

Avec les valeurs numériques retenues:

(en p.b.) $r_1 - r_2 \geq 25\,(6\rho - 0{,}9)$

(en p.b.) $r_1 - r_2 \leq 25\,(40 - 6\,\rho)$

Si $\rho = 1$, $r_1 - r_2 \geq 127{,}5$ Comme $r_1 - r_2 = 150$ pb, on voit que $x>0$ et $1-x>0$.

$r_1 - r_2 \leq 900$

Si par contre σ_1 était égal à *0,004,* alors les conditions seraient :

$r_1 - r_2 \geq 25\,(12\rho - 9)$

$r_1 - r_2 \leq 2{,}5\,(16 - 12\,\rho)$

Si, par exemple, $\rho = 0$, $r_1 - r_2 \geq -22{,}5$ p.b.

$r_1 - r_2 \leq 40$ p.b.

il faut donc que r_1 soit supérieur à r_2 d'au moins 22,5 pb.

Mais si ρ -1, $r_1 - r_2 \geq 7{,}5$ p.b.

$r_1 - r_2 \leq 10$ p.b.

il faut donc que r_2 soit inférieur à r_1 d'au moins 7,5 pb, mais pas plus de 10 pb.

Une différence importante de ces règles par rapport à celles obtenues en l'absence de ratio Cooke est qu'elles font intervenir à la fois la volatilités du crédit ($\sigma_1^{2)}$ et la covairance des risques (σ_{12}) alors que, en l'absence de contrainte de fonds propres, seule la covariance intervient.

(b) La marge intensive

Supposons que l'on puisse classer les risques de la banque en catégoies homogènes: les crédits de type 1, de type 2,... de type n. On va maintenant se demander, partant d'une situation donnée, à quelle condition l'accroissement du crédit de type i permet d'améliorer l'objectif de la banque [11]. La réponse prend une forme particulièrement simple *(voir annexe 3)* puisque l'on trouve que la règle est la suivante:

$r_i - r_f$	=	$ß_i$	x	$(\tilde{\rho}_f - r_f)$
spread minimum requis		béta		écart entre le rendement des fonds propres et le taux d'intérêt sans risque

Le spread minimum requis est proportionnel à l'écart entre le rendement moyen des fonds propres (calculé dans la situation de départ) et le taux de refinancement de la banque. Le coefficient de proportionnalité $ß_i$, est le «beta» de l'actif risqué *i*, c'est-à-dire que $ß_i$, est le coefficient de corrélation de r_i sur ρ_f [12]. On obtient ainsi une «droite de marché» que l'on peut calculer à partir de l'actif risqué considéré (*i* ici) et la rentabilité du portefeuille de la banque (ρ_f). Dans l'exemple (où n = 2), considéré tout au long de cet article, on trouve que $\rho_f - r_f$ vaut 84 pb dans le cas où les deux actifs sont indépendants. D'où un spread requis de 84 $ß_i$ (en points de base). Bien sûr, $ß_i$ dépend de *k*, c'est-à-dire de la contrainte sur les fonds propres.

Enfin, on peut, au lieu de supposer que la banque maximise le rendement des fonds propres (corrigé du risque), lui imposer - comme on l'a fait plus haut un rendement minimum ρ_f (les 15 % après impôts supposés dans l'exemple servant au calcul par les banques du «coût Cooke»). Dans ce cas, le spread minimum obtenu :

ri - rf	=	$k\left(\dfrac{\tilde{\rho}_f}{(1-t)} - rf\right)$	+	$ß_i\ (\tilde{\rho}_f - r_f)$
spread minimum requis		spread «sans risque»		coût du risque

c'est-à-dire la somme du spread calculé usuellement par les banques (sans risque) et du coût du risque qui fait intervenir le beta de l'actif risqué et l'écart entre ρ_f et r_f. Mais cette fois, le rendement des fonds propres doit être celui requis (15 %) si bien que la prime de risque est désormais de 500 $ß_i$.

11 *c'est-à-dire partant d'un vecteur x = (x_1,... x_2) de crédits, à quelle condition* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$.

12 $ß_i = \dfrac{\text{cov}(r_i, \rho_f)}{v(p_f)}$

Comme β_i est en général compris entre 0 et 1,5, on voit que le résultat de notre exemple numérique n'est «plausible» que lorsque β_i est très faible. En outre, imposer au rendement moyen des fonds propres d'être égal à 15 %, c'est imposer un choix de *a*, c'est-à-dire du coeHicient d'aversion pour le risque[13]. Dans l'exemple retenu, on trouve que a doit être inférieur à 1, ce qui est un coefficient *très* faible et hautement improbable (rappelons qu'on avait retenu $a = 10$, et qu'il faut $a = 24$ pour obtenir spontanément les 4 % de fonds propres imposés par le ratio Cooke). Ainsi, pour des actifs ayant des caractéristiques de risque et de rendement données, *il y a une relation inverse entre le coefficient d'aversion pour le risque et le rendement requis pour les actionnaires.*

Au total, on voit qu'il y a pour le banquier un choix à faire: ou il privilégie un degré d'aversion pour le risque et, dans ce cas, il ne doit pas s'imposer un rendement requis pour les actionnaires, puisque celui-ci est endogène; ou il choisit un seuil de rentabilité minimum à franchir et, dans ce cas, il fait un choix implicite du degré d'aversion pour le risque qui est le sien.

3. L'affectation des fonds propres.

L'imposition du ratio Cooke à un taux de 4 % avec une pondération des créances selon leur nature a conduit les banques à une réflexion sur le bien fondé de ce critère, qui, en particulier, ne distingue pas selon la nature de l'emprunteur et le risque qui peut lui être associé. Mais, plus encore, elle conduit à s'interroger sur la répartition de la «pénurie» de fonds propres (créée par le ratio Cooke lorsqu'il est contraignant) entre les diverses activités. On a vu, dans la deuxième partie, comment cette «pénurie» affecte l'allocation des risques et le choix du portefeuille optimal. Mais, simultanément, il s'est développé la thèse selon laquelle le «coût du Cooke» ne serait pas le même pour tous les crédits et dépendrait de leurs caractéristiques propres. Un crédit à ELF ou General Electric présente beaucoup moins de risques qu'un crédit de même nature à une P.M.E. du bâtiment ou des services informatiques. Est-il légitime dans ces conditions de considérer que c'est la même proportion de fonds propres (4 % du crédit) qui doit «supporter» ce crédit ?

Le modèle utilisé ici apporte une réponse, qui peut s'énoncer ainsi :

1. seule la contrainte globale compte ;

2. il y a une infinité de façons de répartir les fonds propres entres les *n* actifs du portefeuille;

13 *voir l'annexe 3 pour le calcul de* a, *en fonction de* ρ_r.

3. on peut obtenir une telle répartition en imposant une règle, une contrainte supplémentaire.

Justifions ces trois affirmations, avant de mettre en évidence trois règles possibles et la décomposition des fonds propres à laquelle elles conduisent.

La première affirmation découle de la manière dont on a procédé. Partant d'une contrainte *globale* ($w_b = kL$), on a déterminé l'allocation optimale des actifs, celle qui maximisait l'objectif, c'est-à-dire l'utilité de la rentabilité financière. La causalité est donc : w_b --> L --> L_i. Les L_i ne dépendent d'ailleurs pas directement de w_b, mais seulement via L. C'est $\frac{L_i}{L}$ qui est déterminé, et il dépend de k et des caractéristiques (rendement/risque) desactifs, mais pas de w_b lui-même.

En revanche, vouloir «affecter» les fonds propres aux différents actifs risqués du portefeuille revient à chercher k_1 et k_2, associés à L_1 et L_2, et tels que $w_b = k_1L_1 + k_2L_2 = kL$. Le choix de k_1 et k_2 doit donc respecter la contrainte :

(1) $$k_1x + k_2(1-x) = k$$

mais cela ne suffit en aucune manière à déterminer k_1 et k_2. Une indétermination subsiste, qui ne peut être levée qu'en imposant une seconde contrainte sur k_1 et k_2. Quelle règle de bon sens imposer ? On va en présenter ici trois, qui ont le mérite d'avoir une justification intuitive, mais qui ne sont que trois règles particulières parmi celles que l'on pourrait imaginer.

Regle n° 1: L'espérance de rendement de chaque actif risqué i doit permettre de couvrir le coût moyen de son financement.

Dans la mesure où chaque franc de crédit i est financé à raison de k_i francs par des fonds propres, qui doivent rapporter le rendement moyen des fonds propres pour les actionnaires et, pour le reste ($1 - k_i$), par du refinancement au taux r_f, cette règle implique que le spread sur l'actif i soit proportionnel à l'écart entre le rendement moyen des fonds propres et le coût des fonds sans risque :

$$r_i - r_f = k_i\,(E(\rho_f)-r_f)$$

le coefficient de proportionnalité étant précisément k_i. Au passage, on note que si les k_i sont proportionnels aux β_i, c'est-à-dire aux «bêtas» des actifs risqués détenus par la banque, la règle est alors cohérente avec celle pouvant servir à la tarification des crédits en présence de ratio Cooke.

Avec cette règle, on peut établir *(voir annexe 4)* que la pondération de l'actif le plus risqué (le crédit de type 1), k_1 sera *inférieure* à la pondération moyenne (k, soit 4 % en pratique) si et seulement si l'écart des taux d'intérêt avec l'actif le moins risqué ($r_1 - r_2$) suffit à compenser l'équivalent-certain de la contribution de ce crédit au risque global du portefeuille de la banque. Ainsi, avec cette règle, à l'actif le plus risqué (l'actif 1 ici), on peut associer *moins* de fonds propres si le rendement moyen de cet actif est suffisamment élevé pour couvrir (et au-delà) le supplément de risque qu'il introduit.

Règle n° 2 : Les fonds propres associés aux actifs risqués sont proportionnels à leur contribution à la variance du portefeuille.

Cette règle correspond à l'idée intuitive selon laquelle les fonds propres doivent permettre de couvrir les risques du portefeuille et doivent, par conséquent, être proportionnés à ces risques. Un crédit peu risqué (à une entreprise cotée «triple A» par exemple) nécessite moins de fonds propres qu'un crédit à une entreprise fragile et en santé financière médiocre.

Dans ce cas encore, L'actif plus risqué peut nécessiter un coefficient de fonds propres (k_1) plus faible que le coefficient moyen k si son rendement moyen est suffisamment fort pour compenser le sur-coût lié au risque. Toutefois, dans ce cas, le coût du risque est indépendant de $\frac{a}{k}$, contrairement à ce qui était apparu avec la règle n° 1.

Règle n° 3 : Les pondérations sont choisies de telle sorte qu'en les retenant dans l'optimisation globale, l'allocation des crédits soit la même qu'en l'absence de contraintes de fonds propres.

On a vu plus haut que, dans ce cas, les pondérations devaient être proportionnelles aux «spreads» d'intérêt, c'est-à-dire d'autant plus forte que les crédits sont risqués.

Avec l'exemple numérique retenu dans cet article, on peut comparer les coefficients auxquels on parvient selon la règle retenue[14]:

	Règle n° 1	Règle n°2	Règle n°3
k_2	10,62 %	15,28 %	12,84 %
k_2	2,66 %	1,72 %	3,21 %
k	4,0 %	4,0 %	4,0 %

Les résultats du tableau amènent trois commentaires:

- l'actif le plus risqué justifie *toujours le ratio Cooke le plus élevé ;*

14 Bien sûr, les résultats présentés ici sont dépendants des valeurs numériques particulières retenues et n'ont qu'un caractère illustratif. Ils dépendent aussi de la valeur retenue pour le coefficient de corrélation entre les deux aléas sur le crédit. On a supposé ici cette corrélation nulle.

- la *dispersion peut être considérable :* $\frac{k^1}{k^2}$ vaut 4 lorsque ce sont les règles 1 et 3 qui sont retenues, mais il atteint 9 environ avec la règle n° 2 ;
- aucune de ces règles ne conduit (dans le cas où la corrélation entre les rendements des actifs est nulle) *aux poids correspondant aux règles simples* auxquelles on peut penser : le rapport des variances des risques est de 40 environ dans l'exemple, et celui des variances pondérées par les marges (les m_1 et m_2 de la première partie) est de près de 15.

Résumé

Peut-on tirer quelques idées simples de ce long cheminement ?

1. L'analyse menée ici a essayé de rendre compte du choix d'une banque confrontée à des risques, sur ses crédits (c'est ce qui a été étudié) et sur la stabilité de ses dépôts. Pour étudier l'impact de l'imposition d'un ratio de fonds propres sur les choix de la banque, il faut développer un modèle du fonctionnement global de la banque qui permette de déterminer ce qui se serait passé en l'absence de contrainte réglementaire. C'est la démarche qui a été suivie ici, dans le cas d'une banque qui cherche à atteindre *une rentabilité des fonds propres* (la rentabilité financière) maximale. En présence de risques et d'aléas, cette rentabilité financière est incertaine. Pour rendre compte de cette incertitude, on a supposé que la banque valorise positivement la moyenne (l'espérance) de sa rentabilité, et négativement la variabilité (la variance) de cette grandeur. Le poids donné à la variabilité est le coefficient d'aversion pour le risque (l'objectif est Espérance de la rentabilité financière - *a x* Variance de la rentabilité financière, où «*a*» est le coefficient d'aversion pour le risque). Plus ce coefficient est fort, plus la banque est «prudente». C'est dans ce cadre théorique que tous les résultats qui suivent ont été établis.

2. On peut alors chercher, lorsque la banque doit constituer son *portefeuille* de crédits, entre deux types de crédit, de risques et de rendements différents, quelle serait la structure optimale de ses choix, en l'absence de contrainte réglementaire d'abord, en présence d'une telle contrainte ensuite.

Deux résultats principaux se dégagent de l'analyse. Tout d'abord, le choix entre les deux types de crédits ne dépend pas du degré d'aversion pour le risque, mais simplement des «spreads» (marge entre le rendement moyen des crédits et le coût du refinancement) et des variances (mesurant le «risque») ou de la covariance entre les deux rendements. Dans le cas où cette covariance est nulle, seule compte *la marge corrigée du risque* (spread sur le crédit *i*/variance du crédit *i*) : la proportion de chaque actif dans le portefeuille est égale à la part de la marge corrigée du risque sur la somme des marges (corrigées du risque).

Le deuxième résultat est le calcul des fonds propres optimaux qui, dans le cas simple où les deux risques sont indépendants, se réduisent au ratio du coefficient d'aversion pour le risque de la banque sur la somme des marges corrigées du risque. Plus la banque est «prudente» vis-à-vis du risque, plus elle voudra des fonds propres ; plus les marges permettent de couvrir les risques des crédits, moins elle exigera de capitaux propres.

Que change alors l'imposition du ratio Cooke, si celui-ci exerce une réelle contrainte sur la banque ? Le résultat principal est qu'il augmente la proportion des *crédits plus risqués que la banque souhaitera détenir*, et ceci de manière tout à fait générale (dans le modèle examiné ici) et indépendamment de la plus ou moins forte aversion pour le risque de la banque. La raison en est simple : le ratio Cooke oblige la banque à constituer davantage de fonds propres. Pour maximiser sa fonction objectif et compenser la perte de rentabilité que cela représente (sur l'effet de levier notamment), elle doit prendre davantage de risques sur les crédits, puisque les plus risqués ont les rémunérations les plus fortes. Et la présence de fonds propres plus élevés «l'autorise» à prendre ces risques supplémentaires, puisqu'ils constituent un matelas plus important vis-à-vis du risque. D'où le résultat.

3. Du point de vue de la *pratique bancaire*, deux questions se posent :

- quel est le «coût du Cooke», c'est-à-dire le prix associé à la contrainte du ratio Cooke dans la banque ?
- y a-t-il une règle permettant d'affecter des fonds propres de manière différenciée selon les crédits pour tenir compte de ce que certains, plus risqués, justifient davantage de fonds propres que d'autres, qui le sont moins ?

La *pratique* des banques consiste à faire le raisonnement marginal suivant. Si la contrainte de fonds propres «mord», 1 franc de crédit supplémentaire va rapporter le taux d'intérêt débiteur, mais exiger un financement, à raison de 96 % au taux du marché monétaire (disons 10 %) et à 4 % par des fonds propres, qui exigent une rémunération après impôts suffisante (disons 15 %, soit 22,5 % avant impôts). Dans ces conditions, le spread (écart entre le taux débiteur et le taux du marché) doit au minimum garantir la rentabilité des 4 % de fonds propres, c'est-à-dire 4 % x (Rendement des Fonds Propres - Taux du marché).

En tenant compte des impôts, cela veut dire que le spread doit couvrir 4 % x (22,5 -10) = 50 points de base (p.b.). Ce raisonnement est fondamental, mais «il fait comme si» le rendement des crédits était certain. Dès lors qu'il ne l'est plus, il faut le modifier pour voir à quelle condition le crédit améliore la situation de la banque *au sens de sa fonction objectif* (c'est-à-dire d'un objectif : Moyenne - *a* Variance) pour atteindre le rendement certain de 15 % souhaité. On peut établir alors que l'on doit ajouter aux 50% p.b. précédents une rémunération du risque spécifique égale au produit suivant :

$$\frac{\text{Coefficient d'aversion du risque (a)}}{\text{Ratio Cooke (4 \%)}} \text{ x Variance du crédit x (1 - taux d'imposition)}$$

Dans l'exemple numérique pris, c'est 7,5 p.b. supplémentaires qu'il faut ajouter, mais cela dépend et de la «prudence de la banque», et de la variance du crédit.

4. Une telle analyse est très globale, et le modèle utilisé ici permet d'examiner une question plus pertinente pour le banquier : à quelle condition la banque qui dispose déjà d'un encours de crédits (d'un portefeuille) a-t-elle intérêt à en faire un autre, dont les caractéristiques de risque et de rendement sont différentes ?

Dans le cas où le ratio Cooke fait peser une réelle contrainte sur la banque, on peut encadrer précisément le spread du nouvel actif ;

$$\boxed{\frac{a}{\text{Ratio Cooke}} \text{ (Variance- Covariance) de l'ancien} \leq \text{Spread du nouveau crédit - Spread des crédits déjà faits} \leq \frac{+\,a}{\text{Ratio Cooke}} \text{ (Variance du nouveau crédit - Covariance)}}$$

L'écart des spreads est donc compris dans un intervalle qui dépend :

- de la variabilité du nouvel actif (et des anciens),
- de la covariance entre le nouveau crédit et le portefeuille existant.

Cette nouvelle règle n'est pas contradictoire avec la précédente, mais plutôt complémentaire, puisqu'elle donne un critère *relatif* de pricing d'un crédit, en fonction du prix des crédits déjà existants. Si l'on cherche un critère *absolu,* en fonction d'un rendement désiré (par exemple les 15 % précédents), il faudrait empiler trois termes :

- le coût du Cooke *sans risque* (50 pb dans notre exemple) ;
- le coût *du risque* (7,5 p.b. dans notre exemple) pour le portefeuille existant ;
- le coût *spécifique* au crédit supplémentaire réalisé (borné dans un intervalle qui dépend des variances et covariances respectives).

5. Enfin, on peut, au lieu de chercher à quelle condition l'introduction d'un risque nouveau dans le portefeuille de la banque se trouve justifiée, se poser la question un peu differemment. En supposant les crédits classés en «catégories de risque», à quelle condition la banque a-t-elle intérêt à accroître son engagement dans l'une de ces catégories de risque ? Ce point de vue conduit à deux résultats importants :

- tout d'abord une règle simple, semblable à celle que donne la théorie du portefeuille, peut être énoncée: la place d'un actif dans le portefeuille de la banque doit être augmentée tant que la marge escomptée sur cet actif dépasse le produit de son «beta» (c'est-à-dire du coefficient de corrélation de son rendement avec celui du portefeuille de la banque) par la marge moyenne sur le portefeuille global de la banque :

$$\underset{\text{marge sur l'actif}}{r_i - r_f} \geq \underset{\text{beta de l'actif } i}{\beta_i} \times \underset{\text{marge moyenne sur le portefeuille}}{(E(p_f) - r_f)}$$

- si l'on essaie d'imposer, comme cela se fait souvent, un seuil de rentabilité minimum requis par les actionnaires (par exemple 15 % après impôts), on peut montrer que cela revient (implicitement) à choisir un coefficient d'aversion pour le risque de la banque. Il est donc injustifié de combiner des analyses imposant un tel seuil et un coefficient d'aversion pour le risque qui ne sera pas nécessairement cohérent avec ce seuil.

6. L'imposition du ratio Cooke à un taux de 4 % avec des pondérations des créances selon leur nature a conduit les banques à une réflexion sur le bien-fondé de ce critère qui, en particulier, ne distingue pas selon la nature de l'emprunteur et le risque qui peut lui être associé. Mais, plus encore, elle conduit à s'interroger sur la répartition de la «pénurie» de fonds propres - créée par le ratio Cooke lorsqu'il est contraignant - entre les diverses activités. Depuis quelques temps, il s'est développé la thèse selon laquelle le «coût du Cooke» ne serait pas le même pour tous les crédits et dépendrait de leurs caractéristiques propres. Un crédit à ELF ou I.B.M. présente beaucoup moins de risque qu'un crédit de même nature à une P.M.E. du bâtiment ou des services informatiques. Est-il légitime dans ces conditions de considérer que c'est la même proportion des fonds propres (4 % du crédit) qui doit «supporter» ce crédit ? Le raisonnement effectué ici apporte une réponse à cette question, qui peut s'énoncer ainsi:

- *seule la contrainte globale* compte et permet de déterminer la proportion de chaque actif détenu, de chaque type de crédit sélectionné,

- si toutefois on cherche à «affecter» les fonds propres aux différents actifs risqués du portefeuille (tout en respectant la contrainte globale des 4 %), il y a une infinité de façons d'y parvenir. Pour en obtenir une particulière, il faut imposer *une règle supplémentaire,* qui lève l'indétermination précédente.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

P. ARTUS : «Coût des fonds propres, choix de la structure d'investissement et allocation des fonds propres», Juillet 1992, Document de travail, Caisse des Dépôts et Consignations.

H. KOEHN et A.M. SANTOMERO : «Regulation of bank capital and portfolio risk», *Journal of Finance,* 1980, pp 1235-1244.

J.C. ROCHET : «Concurrence imparfaite et stratégie bancaire», *Revue Economique,* 1992, pp 261-274.

J.C. ROCHET : «Capital requirements and the behaviour of commercial banks» *European Economic Review,* Vol 36, 1992, pp 1137-1178.

A.M. SANTOMERO et D. KIM : «Risk in banking and capital regulation», *Journal of Finance,* 1988.

N.T. VAN : «La nouvelle gestion de la firme bancaire face à la réglementation des fonds propres», Document de travail, Direction des Etudes Economiques. B.N.P., Octobre 1991.

ANNEXE 1 : *LE MODÈLE DE LA BANQUE*

Si x est la proportion du crédit global investi dans l'actif de type 1, 1-x celle investie dans l'actif de type 2, le rendement des fonds propres ρ_f s'écrit :

$$\tilde{\rho}_f = r_f + \frac{x(\tilde{r}_1 - r_2) + (1-x)(\tilde{r}_2 - r_f)}{k}$$

où les variables surmontées d'un «~» indiquent des variables aléatoires.

La fonction d'utilité de la banque (en l'absence de tout impôt) s'écrit :

$u(\tilde{\rho}_f) = E(\tilde{\rho}_f) - \frac{a}{2}V(\tilde{\rho}_f)$ si $E(\tilde{\rho}_f)$ est l'espérance mathématique de $(\tilde{\rho}_f)$

$V(\tilde{\rho}_f)$ sa variance

soit :

$$u(\tilde{\rho}_f) = r_f + \frac{1}{k}[x(r_1 - r_f) + (1-x)(r_2 - r_f)] - \frac{a}{2k^2}[x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}]$$

où r[1] et r[2] sont les valeurs moyennes de $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$ $(r_1 = E(\tilde{r}_1)\,;\ r_2 = E(\tilde{r}_2))$

σ_1^2 et σ_2^2 sont les variances de $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$

σ_{12} est leur covariance $(\text{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2))$

(a) Pas de ratio Cooke

La banque cherche à maximiser $u\ (\tilde{\rho}_f)$ par rapport à x et ki, ce qui conduit à :

$$(1) \qquad x^* = \frac{(r_1 - r_f)\sigma_2^2 - ((r_2 - r_f)\sigma_{12}}{(r_1 - r_f)(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + (r_2 - r_f)(\sigma_1^2 - \sigma_{12})}$$

$$(2) \qquad k^* = a\frac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}{(r_1 - r_f)(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + (r_2 - r_f)(\sigma_1^2 - \sigma_{12})}$$

On a posé dans le texte : $m_1 = \frac{r_1 - r_f}{\sigma_1^2}$; $m_2 = \frac{r_2 - r_f}{\sigma_2^2}$ pour calculer x^* et k^* dans l'hypothèse où $\sigma_{12} = 0$:

$$x^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \qquad k^* = \frac{a}{m_1 + m_2}$$

b) La contrainte de Cooke «mord» :

Cette fois, k est imposé par la réglementation si bien que la maximisation de $u\ (p_f)$ par rapport au seul x conduit à :

(3) $$x = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \left\{ \frac{k}{a}(r^1 - r^2) + \sigma_2^2 - \sigma_{12} \right\}$$ qui dépend désormais de k et de a.

Si l'on pose : $k = k^* + \alpha$ (avec $\alpha \geq 0$) et que l'on remplace k^* par son expression tirée de (2), il vient :

$$x = x^* + \frac{\alpha}{a} \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\sigma_{12}}$$

Comme, par hypothèse $r_1 > r_2$, α et ≥ 0, on en déduit que $x \geq x^*$.

(c) coefficients Cooke différenciés

Cette fois

$$u(\tilde{\rho}_f) = r_f + \frac{(r_1 - r_f)x + (r_2 - r_f)(1-x)}{k_1 x + k_2(1-x)} - \frac{a}{2} \frac{\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 (1-x)^2 + 2\sigma_{12} x(1-x)}{(k_1 x + k_2(1-x))^2}$$

On trouve pour x :

$$x = \frac{a(\sigma_2^2 k_1 - \sigma_{12}\, k_2) + k_2[(r_1 - r_f)k_2 - (r_2 - r_f)k_1]}{a[\sigma_1^2 k_1 + \sigma_2^2 k_1 - \sigma_{12}(k_1 + k_2)] - ((k_1 + k_2)\,[(r_1 - r_f)k_2 - (r_2 - r_f)k_1]}$$

Lorsque $k_1 = k_2 = k$, on retrouve la même valeur de x que plus haut (paragraphe (b)). Cherchant à quelle condition $x = x^*$, il vient :

$$0 = [k_1(r_2 - r_f) - k_2(r_1 - r_f)][a(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2) - k_1[\sigma_1^2(r_1 - r_f) - \sigma_{12}(r_2 - r_f)] - k_2[\sigma_2^2(r_2 - r_f) - \sigma_{12}(r_1 - r_f)$$

qui conduit à une condition sur k_1 et k_2 indépendante de a, donc des spécificités de la banque :

$$\frac{k_1}{r_1 - r_f} = \frac{k_2}{r_2 - r_f}$$

Les pondérations Cooke doivent être *proportionnelles aux marges d'intérêt* sur les crédits (r_i - r_f pour l'actif i).

ANNEXE II : *LE CAS DU SYSTÈME BANCAIRE US*

Le modèle utilisé dans le texte est une variante de celui utilisé à l'Annexe 1, avec trois modifications :

- le crédit de type 2 (peu risqué) est une obligation d'Etat, sans risque, et qui paye un coupon égal au taux d'intérêt à long terme r_e ;

- le taux de refinancement des banques est une variable aléatoire $\tilde{r}_f$, de moyenne r_f et de variance σ_f^2 ;

- la pondération Cooke est différente selon les actifs de la banque. Elle est de k pour le crédit risqué, de zéro pour les obligations d'Etat.

Dans ces conditions, si σ_{1f} est la covariance entre l'aléa sur le crédit risqué et celui sur le taux de refinancement, la banque cherche à maximiser :

$$u(\tilde{\rho}_f) = r_f + \frac{x(r - r_f) + (1-x)(r_l - r_f)}{kx} - \frac{a}{2k^2x^2}\left\{x^2\sigma_1^2 + (1-kx)^2\sigma_f^2 - 2x(1-x)\sigma_{1f}\right\}$$

Les conditions du premier ordre donnent : $x = \dfrac{\sigma_f^2}{\frac{k}{a}(r_l - r_f) + (\sigma_{1f} + k\sigma_f^2)}$

On voit que $x = 0$ si $\sigma_f = 0$ ou si $a = 0$, et que x ne dépend pas de σ_l, c'est-à-dire du risque sur le crédit (risqué).

ANNEXE 3

1. On a $\tilde{\rho}_f = r_f + < \frac{x}{k}, \tilde{\rho} >$

où $\tilde{\rho}$ est le vecteur des $\tilde{\rho}_i = \tilde{r}_i - r_f$ ($\rho_i = r_i - r_f$ la moyenne)

x est le vecteur des x_i

Donc $V(\tilde{\rho}_f) = < V(\frac{x}{k}), \frac{x}{k} >$ où V est la matrice (n, n) dont les éléments v_{ij} sont les covariances de $\tilde{\rho}_i$ et de $\tilde{\rho}_j$: $v_{ij} = cov\ (\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_j) = cov\ (\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$

Posons $y = \frac{x}{k}$, alors : $\tilde{\rho}_f = r_f + < y, \tilde{\rho} >$

$$V(\tilde{\rho}_f) = < Vy, y)$$

2. La banque cherche à maximiser

$$u(\tilde{\rho}_f(1-t)) = (1-t)\left\{r_f + < y, \rho > - \tfrac{a}{2}(1-t) < Vy,\ y >\right\}$$

ce qui est obtenu pour $y^* = \dfrac{V^{-1}\rho}{a(1-t)}$

La moyenne et la variance de $\tilde{\rho}_f$ valent alors :

$$E(\tilde{\rho}_f) = r_f + < y^*, \rho > = r_f + \frac{1}{a(1-t)} < V^{-1}\rho, \rho >$$

$$V(\tilde{\rho}_f) = < Vy^*, y^* > = \frac{< \rho, V^{-1}\rho >}{a^2(1-t)^2}$$

3. La règle de tarification est

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0 \text{ soit } \frac{\partial u}{\partial y_i} \geq 0, \text{ soit : } \rho_i - a(1-t)(Vy)_i \geq 0$$

$$r_i - r_f \geq a(1-t)(Vy)_i$$

Posons $\beta_i = \frac{(Vy)_i}{V(\tilde{\rho}_f)}$ Alors :

$$(Vy)_i = \beta_i V(\tilde{p}_f) = \frac{\beta_i < \rho, V^{-1}\rho >}{a^2(1-t)^2}$$

La règle devient :

$$r^i - r_f \geq \frac{\beta_i}{a(1-t)} < \rho, V^{-1}\rho > = \beta_i(E(\rho_f) - r_f)$$

D'où le résultat du texte (à l'égalité) :

$$\boxed{r_i - r_f = \beta_i [E(\tilde{p}_f) - r_f]}$$

$$\beta_i = \frac{(Vy)i}{V(\rho_f)} = \frac{Cov(r_i, \rho_f)}{V(\rho_f)}$$

4. Dans l'hypothèse où la banque s'impose un retour minimum sur fonds propres de $\tilde{p}_f$ après impôts,

$u(\tilde{\rho}_f(1-t) = (1-t)\left\{r_f + < y, p) - \frac{a}{2}(1-t) < Vy, y >\right\}$ avec cette fois

$$\tilde{\rho}_i = \tilde{r}_i - r_f(1-k) - \frac{\tilde{\rho}_f}{(1-k)}k$$

La condition de tarification devient :

$$\boxed{r_i - r_f = k\,[\frac{\tilde{\rho}_f}{1-t} - r_f] + \beta_i[E(\tilde{\rho}_f) - r_f]}$$

Le fait d'imposer $\tilde{\rho}_f$ implique pour $E(\tilde{\rho}_f)$ qu'il soit (au moins) égal à $\tilde{\rho}_f$,

soit : $\tilde{\rho}_f - r_f = \frac{< V^{-1}\rho, \rho >}{a(1-t)}$, ce qui impose $\boxed{a = \frac{< V^{-1}\rho, \rho >}{\tilde{\rho}_f - r_f}}$

Ainsi, choisir $\tilde{\rho}_f$ revient implicitement à choisir le coefficient d'aversion pour le risque "a".

ANNEXE 4 : *L'AFFECTATION DES FONDS PROPRES*

On introduit la contrainte : $k_1 x + k_2 (1\text{-}x) = k$ (1)
Les trois règles étudiées dans le texte sont les suivantes :

Règle n° 1 : L'espérance de rendement de l'actif risqué *i* doit permettre de couvrir le coût moyen de son financement : $r^i = k^i E(\tilde{p}^f) + (1 - k_i) r_f \quad (V_i)$

De cette relation on tire $k^i = \dfrac{r_i - r_f}{E(\tilde{\rho}^f) - r^f}$. Il faut vérifier d'abord que la relation (1) est vérifiée. Remplaçant k_1 et K_2 par leurs expressions en fonction de r_f et $E(\tilde{\rho}_f)$ et $E(\tilde{\rho}_f)$ par son expression en fonction de k, r_1, r_2 :

$$(r_1 - r_f)x + (r_2 - r_f)(1 - x) = k[E(\tilde{p}_f) - r_f] = r_1 x + r_2(1 - x) - r_f(1 - k) - k r_f$$

qui est bien vérifiée dans tous les cas. On peut alors calculer

$$k_1 = \frac{r_1 - r_f}{E(\tilde{\rho}_f) - r_f} :$$

$$k_1 = \frac{(r_1 - r_f)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})}{\frac{1}{a}(r_1 - r_2)^2 + \frac{1}{k}[(r_1 - r_f)(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + (r_2 - r_f)(\sigma_1^2 - \sigma_{12})]}$$

Pour voir à quelle condition $k_1 < k$, on peut remarquer que :

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k} + \frac{(r_1 - r_2)}{(r_1 - r_f)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})} \left\{ \frac{1}{a}(r_1 - r_2) - \frac{1}{k}(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) \right\}$$

Donc $k_1 < k \Rightarrow \dfrac{1}{k_1} > \dfrac{1}{k}$ c'est à dire $\dfrac{1}{a}(r_1 - r_2) > \dfrac{1}{k}(\sigma_1^2 - \sigma_{12})$

soit : $(r_1 - r_2) + \dfrac{a}{k}(\sigma_1^2 - \sigma_{12})$

Règle n° 2 : Les fonds propres associés aux actifs risqués sont proportionnels à leur contribution à la variance du portefeuille :

$$k_1 x = \lambda (x^2 \sigma_1^2 + x(1 - x)\sigma_{12})$$
$$k_2(1 - x) = \lambda [x^1 - x)^2 \sigma_2^2 + x(1 - x)\sigma_{12}]$$

Pour que cette règle soit acceptable, il faut que $k = k_1 x + k_2 (1\text{-}x)$, ce qui impose une valeur à λ :

$$\lambda = \frac{k}{x^2 \sigma_1^2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1 - x)\sigma_{12}}$$

Remplaçant x par sa valeur telle que calculée plus haut, et après simplification, on trouve que :

$$\lambda = \frac{k(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})}{\frac{k}{a}(r_1 - r_2)^2 + (\sigma_1^2\,\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}$$

et, par conséquent :

$$k^1 = k\frac{\frac{k}{a}(r_1 - r_2)(\sigma_1^2 - \sigma_{12}^2) + (\sigma_1^2\,\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}{\frac{k}{a}(r_1 - r_2)^2 + (\sigma_1^2\,\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}$$

Cette fois, $k_1 > k$ si :

$$r_1 > r_2 + (\sigma_1^2 - \sigma_{12})$$

Règle n° 3 : Les pondérations des fonds propres (k_1 et k_2) sont choisies de telle sorte qu'en les retenant dans l'optimisation globale, l'allocation des crédits *(x, 1-x)* soit la même qu'en l'absence de contrainte de fonds propres *(x*, 1-x*)*.

Formellement, cela revient à chercher (k_1, k_2) tels que le maximum de $u(\tilde{p}_f)$ calculé avec les k_i conduise à une valeur de $x = x^*$:

$$\text{Max} \quad u(\tilde{p}_f) = \frac{(r_1 - r_f)x + (r_2 - r_f)(1-x)}{k(\alpha_1 x + \alpha_2(1-x)} - \frac{a}{2}\frac{\sigma_1^2 x^2 \sigma_2^2 (1-x)^2 + 2\sigma_{12}\,x(1-x)}{k^2[\alpha_1 x + \alpha_2(1-x)]^2}$$

avec $k_i = \alpha_i k$ $(i = 1, 2)$. Calculant le x optimal $(\tilde{x})$, il vient :

$$\tilde{x} = \frac{\alpha_2\,[\alpha_1(r_2 - r_f) - \alpha_2\,(r_1 - r_f)] - \frac{a}{k}(\alpha_1\sigma_2^2 - \sigma_{12})}{(\alpha_1 - \alpha_2)\,[\alpha_2(r_1 - r_f)] - \frac{a}{k}(\alpha_2\sigma_1^2 + \alpha_1\sigma_2^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\,\sigma_{12})}$$

Exprimant que $x^* = \tilde{x}$, on trouve comme unique solution :

$$\alpha_1 = \alpha(r_1 - r_f)$$
$$\alpha_2 = \alpha(r_2 - r_f)$$

Les coefficients optimaux sont proportionnels aux spreads des deux types de crédit.

Calculant α pour que (1) soit satisfaite, il vient, tous calculs faits :

$$k_1 = k\frac{(r_1 - r_f)\,[(r_1 - r_f)\,(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + (r_2 - r_f)\,(\sigma_1^2 - \sigma_{12})]}{(r_1 - r_f)^2\,\sigma_2^2 - 2(r_1 - r_f)\,\sigma_{12} + (r_2 - r_f)^2\,\sigma_1^2}$$

et la condition que $k_1 < k$ s'écrit cette fois :

$$\frac{r_2 - r_f}{r_1 - r_f} < \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}$$