ÉQUILIBRES MULTIPLES ET VOLATILITÉ BOURSIÈRE

ÉDOUARD CHALLE *

L'hypothèse de rationalité des anticipations est fréquemment associée à l'idée selon laquelle l'équilibre général d'une économie de marché concurrentielle est à la fois unique et optimal. Dans le cadre de l'évaluation d'actifs, cette identification a conduit les économistes à tenter d'expliquer, avec plus ou moins de succès, la volatilité importante des cours boursiers dans le cadre de modèles d'équilibre général caractérisés par un équilibre unique, comme le MEDAF de consommation de Lucas (1978), ainsi que certaines de ses variantes destinées à en améliorer le contenu prédictif comme les modèles à formation d'habitudes (pour une présentation synthétique de ces approches, voir Campbell, 1999).

Cette identification de l'hypothèse de rationalité des anticipations au résultat d'unicité de l'équilibre méconnaît le trouble qui s'est emparé des macroéconomistes dès le début des années 1970, lorsqu'ils se sont rendu compte que la dépendance des variables présentes à leurs réalisations futures pouvait être à l'origine d'une vaste multiplicité d'équilibres dynamiques, et donc d'une indétermination radicale des variables macroéconomiques (voir, par exemple, Black, 1972). L'espoir initialement entretenu, selon lequel cette multiplicité n'était que le résultat de l'imparfaite microfondation des comportements propre aux modèles linéaires, a rapidement volé en éclat avec la publication de résultats démontrant l'émergence d'une multiplicité d'équilibres dans des modèles parfaitement microfondés[1]. Ceux-ci fournissaient, en effet, les premiers exemples d'indétermination de l'état stationnaire dans des modèles où le comportement des agents était parfaitement explicité,

* Université de Cambridge, courriel : challe@econ-cam.ac.uk

et suggérait ainsi que l'existence d'une multiplicité d'équilibres dynamiques était une conséquence assez générale de l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Quoique cette multiplicité fût originellement considérée comme une implication plutôt indésirable des modèles à anticipations rationnelles, il est vite apparu qu'elle permettait, en conférant un rôle à la volatilité des anticipations dans la dynamique macroéconomique, de réinterpréter certaines idées « keynesiennes » relatives à l'instabilité des économies de marché (Azariadis, 1981 ; Farmer, 1999).

Le présent article, qui procède de cette approche, se propose d'évaluer la capacité des modèles d'équilibres multiples à rendre compte de l'importante volatilité observée sur les marchés boursiers. L'*a priori* méthodologique suivi ne sera donc pas de considérer l'ouverture des dynamiques qu'ils engendrent à l'arbitraire des anticipations comme une manifestation de leur incomplétude, arbitraire dont il faudrait se débarrasser à l'aide de critères de sélection raffinés, mais plutôt comme une implication positive susceptible d'améliorer notre compréhension des phénomènes liés à la volatilité des cours. Ces modèles permettent, en effet, d'expliquer une partie de la volatilité boursière comme le résultat de *déplacements successifs d'un équilibre à un autre* gouvernés par les anticipations des agents. Dans la mesure où ces déplacements peuvent être entièrement déconnectés des fondamentaux, ils constituent une source de volatilité *purement auto-réalisatrice,* susceptible d'amplifier ou de s'ajouter à la volatilité fondamentale.

Les limites d'espace obligeant à certains arbitrages, le présent exposé sera naturellement partiel. Notamment, l'article se concentrera presque exclusivement sur les aspects théoriques de la problématique, et ignorera largement l'abondante littérature empirique sur les « anomalies financières » ainsi que l'articulation subtile entre ces anomalies et les conclusions des modèles. Le seul fait stylisé à l'aune duquel nous évaluerons la pertinence empirique des modèles considérés est celui de la *volatilité excessive* des cours boursiers, ou plutôt, si l'on souhaite éviter toute controverse sémantique, celui de l'« énigme de la volatilité », c'est-à-dire de leur volatilité particulièrement élevée comparée à celle des dividendes ou des agrégats macroéconomiques[2].

La première section présente de manière synthétique et abstraite les trois formes de multiplicité d'équilibres susceptibles d'apparaître dans les modèles dynamiques à anticipations rationnelles. La seconde section introduit la théorie des bulles rationnelles, pour présenter ensuite les principales critiques qui lui ont été adressées. La troisième section illustre l'application en finance d'un modèle de défaut de coordination, centré autour du concept de « liquidité auto-réalisatrice ». La quatrième section étudie la nature des équilibres d'actifs déterministes et stochastiques impliqués par l'indétermination de l'état stationnaire.

LA MULTIPLICITÉ D'ÉQUILIBRES DANS LES MODÈLES DYNAMIQUES : UNE VUE D'ENSEMBLE

Considérons un modèle dynamique univarié et de temps discret où la variable considérée est y_t (on s'intéresse donc au comportement de la suite $\{y_t\}_{t=0,\ldots\infty}$). L'évolution de y_t est décrite par l'équation de récurrence suivante :

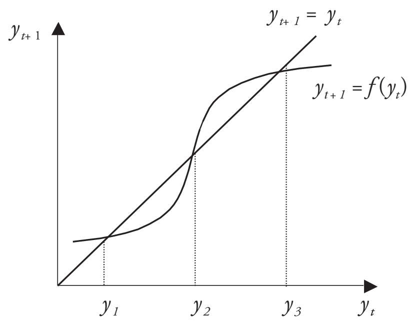
$$y_{t+1} = f(y_t)$$

Les états stationnaires de cette dynamique sont tous les y tels que $y = f(y)$, et correspondent au point ou la courbe $y_{t+1} = f(y_t)$ coupe la droite $y_{t+1} = y_t$. Selon la forme de f, la dynamique décrite par l'équation de récurrence précédente peut engendrer zéro, un ou plusieurs états stationnaires, ainsi que plusieurs équilibres *non stationnaires,* c'est-à-dire correspondant à des trajectoires où la réalisation de y_t est différente d'une période à l'autre.

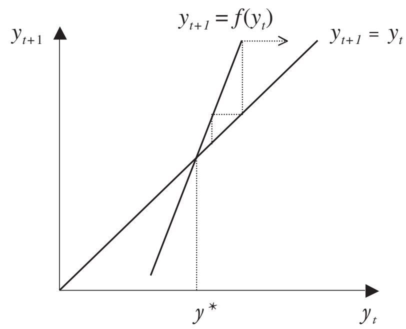
Le graphique n°1 représente schématiquement les trois formes de multiplicité d'équilibres que l'on rencontre dans les modèles économiques intertemporels. La configuration I du graphique n°1 montre une *multiplicité d'états stationnaires.* Il est associé aux formalisations du niveau de l'activité économique en termes de « complémentarités stratégiques » et de défauts de coordination (voir Cooper et John, 1988 ; Artus, 1993). Dans cette configuration, la coordination des agents sur l'un des équilibres stationnaires du modèle dépend de leurs anticipations. Il y a « défaut de coordination » lorsque qu'un équilibre « bas » est sélectionné par chaque agent (par exemple, parce que chacun anticipe que tous les autres choisissent un équilibre bas, et subit une perte d'utilité individuelle à agir différemment), alors que l'équilibre « haut » serait préféré s'il était choisi par tous simultanément. La configuration II du graphique n°1 représente une économie dans laquelle un équilibre stationnaire unique est « entouré » d'une *multiplicité de trajectoires divergentes,* typiques de celles que l'on rencontre dans la théorie des bulles rationnelles (Blanchard, 1979 ; Blanchard et Watson, 1984 ; Tirole, 1985). Dans une telle économie, l'état stationnaire y^* est instable : une coordination des agents sur une valeur légèrement supérieure à y^* à la période 0 conduit y_t sur une trajectoire explosive. Il existe dans ce cas une *infinité* d'équilibres dynamiques (un *continuum*), car tout $y_0 > y^*$ donne lieu à une trajectoire divergente possible (on peut exclure le cas où $y_0 < y^*$, car alors y_t pourrait devenir négatif, ce qui est impossible pour la plupart des grandeurs économiques). Le graphique III montre une situation d'*indétermination de l'état stationnaire,* dans laquelle ce dernier est entouré d'un *continuum de trajectoires d'équilibre convergentes :* toute valeur y_0 choisie par les agents donne en effet lieu à une trajectoire d'équilibre qui converge vers l'état stationnaire.

Ces trois formes de multiplicité d'équilibres ont été abondamment mobilisées dans les modèles macroéconomiques pour rendre compte de la dépendance des variables aux anticipations des agents. Mise à part la théorie des bulles rationnelles sur les actifs financiers, l'application de ces propriétés à la finance a été plus rare. Les sections qui suivent en proposent une présentation et une évaluation critique.

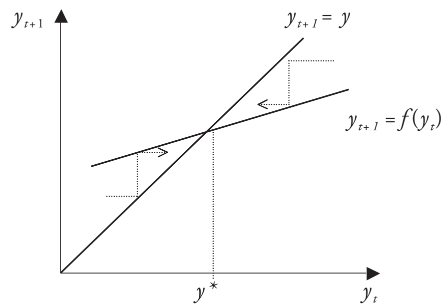
Graphique n° 1
Trois formes de multiplicité d'équilibres



Multiplicité d'équilibres
stationnaires
(défauts de coordination)
I



Multiplicité d'équilibres
non stationnaires *divergents*
(bulles rationnelles)
II



Multiplicité d'équilibres
non stationnaires *convergents*
(indétermination de l'état stationnaire)
III

LA THÉORIE DES BULLES RATIONNELLES ET SES LIMITES

La théorie des bulles rationnelles : cadre théorique

La théorie des bulles rationnelles constitue, sans aucun doute, la première approche ayant cherché à expliquer la volatilité boursière dans un cadre à anticipations rationnelles, et c'est pourquoi nous l'abordons en premier. On se contentera d'une exposition élémentaire du phénomène de bulle rationnelle, pour en souligner ensuite les principales limites.

Si l'on suppose que le taux d'actualisation r et le dividende d versé à chaque période sont constants, alors la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage s'écrit $r = (p_{t+1} - p_t + d)/p_t$, (le rendement net obtenu en investissant dans l'action doit être identique au rendement net requis sur les placements alternatifs). L'équation d'absence d'arbitrage implique que le prix de l'actif en t est fonction du prix de l'actif prévu en t+1 et du dividende à recevoir :

$$p_t = (p_{t+1} + d)/\ (1+r)$$

En itérant cette équation vers l'avant par substitutions successives, on trouve que le prix de l'action en t est donné par :

$$p_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^j d + \lim_{n\to\infty} \frac{p_{t+n}}{(1+r)^n}$$

$$\equiv F + B_t\,,$$

où F est la valeur fondamentale de l'actif et B_t toute variable vérifiant $B_{t+1} = (1+r)B_t$. La variable B_t n'est égale à zéro que sous la condition de transversalité selon laquelle le terme en limite de l'équation précédente est lui-même égal à zéro. Lorsque B_t est différent de zéro, la bulle engendre un écart exponentiellement croissant entre le prix de l'actif et sa valeur fondamentale. Une telle dynamique est représentée sur la configuration II du graphique n°1, où $y^* = F$, B est l'écart entre F et le prix courant (qui suit la dynamique explosive tracée en pointillés), et 1+r est la pente de la courbe $y_{t+1} = f(y_t)$, qui indique la vitesse à laquelle croît la bulle rationnelle. Une bulle apparaît dès que $B_t \neq 0$, et croît au taux r. Il y a bien multiplicité d'équilibres, au sens où, en sus de la valeur fondamentale, existe un *continuum* de trajectoires d'équilibres indexées par la valeur initiale de la bulle.

Les phénomènes de bulle qui viennent d'être présentés sont purement déterministes. Il est néanmoins possible de généraliser ces processus en introduisant une probabilité positive que la bulle « éclate » à chaque période et que le cours retourne à sa valeur fondamentale ; ce retour peut alors s'interpréter comme un krach boursier (Blanchard, 1979).

Les limites des bulles rationnelles

En dépit de son élégance et de sa capacité à reproduire des dynamiques de prix analogues à celles observées lors des grandes euphories spéculatives, la théorie des bulles rationnelles a été critiquée, tant pour ses fondements théoriques que pour ses implications empiriques. On retiendra ici les trois principales critiques théoriques[3].

Les limites de marché. Tirole (1982) a avancé plusieurs arguments visant à démontrer l'inexistence d'équilibres avec bulles rationnelles dans les modèles d'équilibre général dynamiques avec un nombre fini d'agents vivant indéfiniment. Comme le gain en capital que l'on peut espérer en achetant un actif dont le prix est sujet à une bulle spéculative ne se réalise que lorsque cet actif est effectivement revendu, aucune bulle ne peut se produire sur un actif dont la durée de vie est finie. Il en est ainsi parce qu'aucun individu n'achèterait l'actif avec bulle à la dernière date de son existence (disons T), n'ayant aucun espoir de le revendre à un prix supérieur à la valeur fondamentale, et donc personne ne l'achèterait à la date T-*1*... C'est donc le raisonnement récursif à rebours, de la part d'agents formant des anticipations rationnelles, qui empêche l'existence de bulles sur des actifs de durée de vie finie. Ce raisonnement s'étend aux actifs dont la durée de vie est infinie, car en cas de bulle, l'espérance inconditionnelle du prix de l'actif est infinie (le processus du prix est divergent), de sorte que le prix de l'actif a toujours une probabilité non nulle de dépasser les « limites de marché » (comme le PIB ou la richesse nette des agents). Tirole (1985) a montré que les bulles pouvaient néanmoins exister dans les modèles à générations imbriquées où le nombre d'agents croît à chaque période, car dans ce cas, la bulle agrégée peut grandir sans limite alors que la bulle *par tête* reste stationnaire (dans ce cas, le taux de croissance de la bulle peut, en effet, être inférieur à celui de la population, et donc à celui du PIB à productivité du travail constante). Santos et Woodford (1997) ont systématisé l'ensemble de ces résultats et ont conclu que l'existence de bulles rationnelles en équilibre général était un phénomène peu robuste, car conditionnel à des hypothèses particulièrement restrictives quant à la participation des agents au marché et à la productivité des actifs sous-jacents.

L'efficience des bulles rationnelles. Nous venons de voir que les bulles rationnelles ne pouvaient exister que dans des économies dans lesquelles la participation des agents au marché était fortement restreinte, comme c'est le cas des économies à générations imbriquées d'agents. Une propriété de cette classe de modèles est que l'équilibre avec bulle est *paréto-optimal*, et que son existence est *conditionnelle à l'inefficience de l'équilibre sans bulle* (Tirole, 1985 ; Weil, 1987). Ceci implique que l'éclatement d'une bulle est associé à un retour définitif à l'équilibre sous-optimal (Weil, 1987). Cette double caractéristique, l'efficience de la bulle et la sous-efficience durable du krach, est en conflit, tant avec la conception intuitive des bulles spéculatives qu'avec l'esprit qui en animait les premières formalisations (voir, par exemple, Blanchard et Watson, 1984), et qui en faisait une manifestation particulière d'une instabilité financière *a priori* néfaste au bien-être des agents.

La naissance des bulles rationnelles. Diba et Grossman (1987, 1988) ont montré que la rationalité des bulles impliquait que celles-ci devaient naître au moment même où l'actif est émis (à la « période 0 »), et ne pouvaient renaître une fois qu'elles avaient explosé. Leur argument est simple et général ; il s'applique à toute dynamique explosive et concerne tant les modèles d'équilibre partiel (comme celui de Blanchard et Watson, 1984) que les modèles d'équilibre général (comme celui de Tirole, 1985). En anticipations rationnelles, la condition de croissance de la bulle s'écrit $E_t(B_{t+1}) = B_t\,(1+r)$, ce qui signifie que l'innovation sur la bulle, c'est-à-dire $\eta_{t+1} = B_{t+1}\text{-}B_t(1+r)$, est un bruit blanc de moyenne nulle (de sorte que $E_t(\eta_{t+1}) = 0$). Supposons que $B_t = 0$, et demandons-nous s'il est possible qu'un processus $\{\eta_i\}_{i=t+1,\ldots\infty}$ donne naissance à une bulle rationnelle. Comme une bulle rationnelle ne peut être négative, sans quoi le prix aurait une probabilité non nulle d'être négatif, on doit avoir $\eta_{t+1} \geq -B_t(1+r)$, et donc $E_t(\eta_{t+1}) > -B_t(1+r)$. Lorsque la bulle a commencé avant la date t, alors $-B_t(1+r) < 0$, de sorte que l'on peut trouver $\eta_{t+1} \neq 0$ tel que $E_t(\eta_{t+1}) = 0 \geq -B_t\,(1+r)$. Lorsqu'elle n'a pas encore commencé à la date t, alors la condition $\eta_{t+1} \geq -B_t(1+r)$ devient $\eta_{t+1} \geq 0$, ce qui n'est compatible avec $E_t(\eta_{t+1}) = 0$ que si $\eta_{t+1} = 0$ (sans quoi l'anticipation serait biaisée, et donc non rationnelle). Si la bulle n'existe pas à la date t, alors elle ne peut donc naître à la date t+1. On peut reformuler cette idée de manière plus intuitive comme suit : si la bulle n'existe pas à en t, alors il faudrait un choc strictement positif dans l'avenir sur la composante B_t pour la faire démarrer. L'hypothèse d'anticipation rationnelle implique que ces chocs sont de moyenne nulle, de sorte que des chocs positifs ne peuvent survenir que si des chocs négatifs sont également à l'œuvre. Comme un choc négatif est impossible car il provoquerait une bulle décroissante (et donc la possibilité que le prix de l'actif devienne lui-même négatif), la seule réalisation possible de ces chocs est zéro pour tout t. Aucune bulle rationnelle ne peut donc naître de manière endogène au cours de la vie d'un actif financier.

Cette dernière critique est particulièrement sérieuse si l'on cherche à rendre compte de la volatilité boursière à l'aide de la théorie des bulles rationnelles. Elle indique, en effet, qu'*il est en fait impossible de sauter d'un équilibre sans bulle à un équilibre de bulle.* La seule configuration possible est celle d'une bulle qui naît au moment de l'émission de l'actif, pour ne jamais renaître si elle éclate. La théorie des bulles rationnelles, dans sa formulation élémentaire, ne semble donc pas fournir une explication cohérente de l'instabilité boursière, en raison, à la fois des conditions très restrictives sur lesquelles elle repose et de son incapacité à engendrer des sauts entre les différentes trajectoires d'équilibres impliquées par le modèle théorique. Cette critique se généralise à des processus de bulles plus complexes, comme les bulles à l'état stationnaire étudiées par Tirole (1985) et les bulles intrinsèques de Froot et Obsfeld (1991), qui sont influencées par les évolutions stochastiques des dividendes.

UN EXEMPLE DE DÉFAUT DE COORDINATION EN FINANCE : LA LIQUIDITÉ AUTO-RÉALISATRICE

La présente section présente un exemple de modèle de volatilité boursière avec défaut de coordination, c'est-à-dire une situation correspondant à la configuration I du graphique n°1. La dynamique engendrée par ce modèle, que l'on doit à Pagano (1988), a la propriété de posséder plusieurs états stationnaires caractérisés par différents niveaux de volatilité. Le travail de Pagano formalise l'idée intuitive de *liquidité auto-réalisatrice* sur les marchés boursiers : d'une part, la profondeur d'un marché de titres, mesurée par le nombre de ses participants, augmente la liquidité de ces titres et donc réduit leur volatilité. Un marché profond incite donc des agents averses au risque à y participer, ce qui contribue à renforcer la profondeur du marché et sa liquidité *ex post.* Inversement, un marché étroit caractérisé par une forte volatilité dissuade certains échangistes d'y participer en raison du risque en capital encouru, et contribue ainsi à perpétuer l'étroitesse de ce marché *ex post.* Une telle situation se caractérise donc par de fortes *complémentarités stratégiques* au sens de Cooper et John (1988) : la décision d'un agent de participer au marché (ce qui augmente sa liquidité et réduit la volatilité des titres) influence la décision des autres agents dans la même direction (ceux-ci sont attirés par le moindre risque en capital). Ces complémentarités peuvent donner lieu à une multiplicité d'équilibres conjecturaux, sur lesquels la profondeur du marché et la volatilité des titres sont déterminées conjointement d'une manière purement auto-réalisatrice : si les agents anticipent que le marché est profond et liquide, ils y participeront et « auto-réaliseront » cette liquidité ; à l'inverse, s'ils anticipent que le marché est étroit et donc les cours très volatiles, ils s'en détourneront et rendront effectivement le marché étroit. Ces équilibres sont, par ailleurs, associés à différents niveaux de bien-être, puisqu'un marché profond et liquide incite les entreprises à y émettre leurs titres, et favorise ainsi l'allocation optimale des ressources financières.

Liquidité et multiplicité d'équilibres : mécanismes fondamentaux

On se contentera ici d'un exposé analytique succinct du mécanisme mis en évidence par Pagano. Celui-ci suppose que la demande d'actif de chaque agent est sujette à des chocs spécifiques (on peut, par exemple, penser à un besoin de liquidité forçant l'échangiste à liquider son portefeuille de titres de manière inattendue), qui contribuent ainsi à augmenter la volatilité des actions. Néanmoins, comme ces chocs ne sont pas corrélés entre les individus, leur effet moyen, mesuré par la variance de la demande agrégée de marché et donc par celle du prix, décroît en fonction du nombre de participants. Si l'on indique par Var p la variance du prix sur le marché et N le nombre de participants, l'influence de ce dernier sur la volatilité du prix peut s'exprimer par la fonction décroissante :

$$\text{Var } p = f(N)$$

Comme les agents sont supposés averses au risque, la volatilité élevée du prix peut dissuader certains d'entrer sur le marché (notamment ceux dont l'entrée au marché est frappée d'un coût important, et dont le gain à participer n'excède par le risque en capital engendré par la volatilité des prix). Cette relation peut s'exprimer à l'aide de la fonction décroissante suivante :

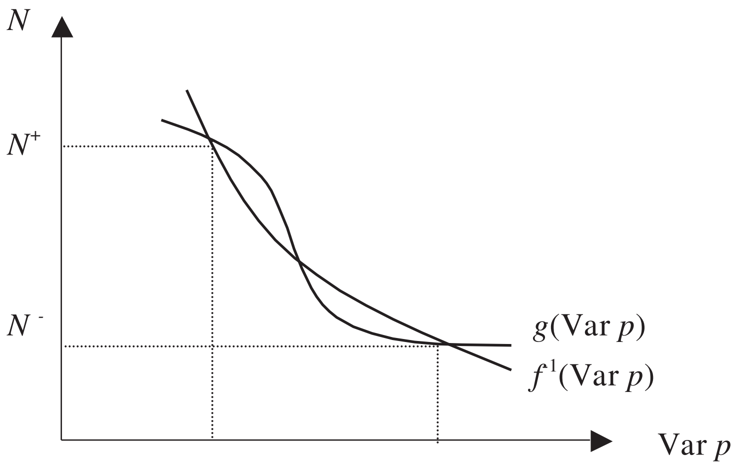
$$N = g(\text{Var } p)$$

La forme des fonctions f et g dépend de l'attitude face au risque des investisseurs et des contraintes auxquelles ils font face (comme la variance des chocs spécifiques sur leur demande d'actifs ou les coûts de participation au marché). La fonction f étant décroissante, son inverse f^{-1} l'est aussi, de sorte que la première relation peut s'exprimer par la fonction décroissante :

$$N = f^{-1} (\text{Var } p)$$

La forme des deux dernières courbes gouverne l'interaction entre le nombre de participants au marché et la volatilité impliquée du prix. Dans certaines conditions, les fonctions décroissantes f^{-1} et g peuvent se croiser plus d'une fois, donnant lieu à une multiplicité d'équilibres conjecturaux où N et Var p sont déterminés conjointement. Cette configuration est représentée sur le graphique n°2. Lorsque l'équilibre N^- est sélectionné par les agents, il y a bien « défaut de coordination », au sens où une décision coordonnée de l'ensemble des participants de choisir l'équilibre haut N^+ améliorerait le bien-être de chacun[4].

Graphique n° 2
Liquidité de marché et multiplicité d'équilibres



La multiplicité d'équilibres explique-t-elle la volatilité boursière ?

Le modèle de Pagano est compatible avec certaines études empiriques démontrant une relation négative entre la profondeur d'un marché et la volatilité du prix des actions qui y sont négociées. Le modèle interprète cette relation comme découlant d'un mécanisme de sélection de l'équilibre dans lequel la volatilité anticipée des actions *ex ante* est auto-réalisée *ex post*. En ce sens, ce modèle à défaut de coordination révèle que la sélection de l'équilibre a d'importantes implications, quant à la manière dont la volatilité fondamentale liée aux chocs sur les demandes individuelles d'actifs se transmet au prix. Remarquons néanmoins que, à la différence des bulles rationnelles étudiées plus haut, la source de l'incertitude sur le niveau des prix est elle-même *purement fondamentale* : il n'existe pas d'incertitude endogène, puisque les sauts entre les différents équilibres ne sont pas considérés. Bien que rien n'indique qu'ils ne puissent se produire, ils ne sont pas explicitement formalisés, ce qui réduit la capacité du modèle à rendre compte de la volatilité « excessive » des cours boursiers. La classe de modèles que nous abordons maintenant permet de dépasser cette limite.

INDÉTERMINATION DE LA VALEUR DES ACTIFS ET « PROPHÉTIES AUTO-RÉALISATRICES »

Cette section explore la troisième forme de multiplicité d'équilibres dynamiques introduite dans la première section, à savoir l'existence d'un *continuum* de trajectoires de prévisions parfaites convergeant vers un même état stationnaire. Cette indétermination de l'équilibre stationnaire aurait une portée limitée si l'on s'en tenait à ces seules trajectoires de prévisions parfaites. Mais on verra qu'elle engendre l'existence d'un *continuum* de processus stochastiques stationnaires au voisinage de l'équilibre de long terme, les équilibres dits de « taches solaires »[5], sur lesquels les croyances arbitraires des échangistes engendrent une volatilité de marché indépendante de l'incertitude fondamentale et donc *purement endogène*. On se contentera ici d'un exposé intuitif des principes généraux gouvernant ces équilibres. Le lecteur pourra trouver une exposition rigoureuse des fondements de la relation entre l'indétermination de l'équilibre et les équilibres de « taches solaires » dans Woodford (1986a). L'article de Benhabib et Farmer (1999) offre une synthèse assez complète des différentes applications des équilibres de taches solaires aux fluctuations macroéconomiques, dont on peut par ailleurs trouver une présentation plus didactique dans Farmer (1999).

On commence par rappeler le mécanisme général à l'origine de l'indétermination de l'équilibre stationnaire et des prophéties autoréalisatrices dans les modèles linéaires univariés. Une application financière de ce mécanisme est ensuite présentée, sous la forme d'un modèle dans lequel ces prophéties auto-réalisatrices influencent la dynamique des cours boursiers. Enfin, on discute de manière informelle les types d'imperfections de marchés à l'origine de l'indétermination de l'équilibre.

L'indétermination de l'état stationnaire : principe général

Imaginons que la dynamique d'une variable macroéconomique soit représentée par l'équation de récurrence linéaire suivante (on se situe donc dans la configuration II ou III du graphique n° 1) :

$$y_{t+1} = ay_t + b \qquad (1)$$

Celle-ci a un état stationnaire y^* dès lors que $a \neq 1$ (cet état peut être, bien entendu, stable ou instable). On peut réécrire la dynamique de y_t comme suit :

$$y_t = y_{t+1}/\mathrm{a} - b/a \qquad (2)$$

Ces deux représentations sont identiques, mais aussi incomplètes tant que l'on n'a pas précisé le statut de la variable y_0. Si $\{y_t\}$ est une suite classique, du type de celles que l'on rencontre dans les sciences de la nature, elle est déterminée de manière unique par une *condition initiale* y_0 et par l'équation de transition (1). Une variable pour laquelle est spécifiée une condition initiale est qualifiée de *prédéterminée* (Blanchard et Kahn, 1980). La représentation (1) paraît alors appropriée, et la suite converge, si et seulement si $|a| < 1$. Dans un modèle économique qui impose que les trajectoires d'équilibre soient bornées (c'est-à-dire qui exclut les bulles par hypothèse), alors pour y^* donné, il existe zéro (si $|a| > 1$) ou un (si $|a| < 1$) équilibre exactement.

Supposons maintenant que la variable y_t soit déterminée, non par sa réalisation passée y_t, mais par l'anticipation de sa valeur future y_{t+1}. Dans ce cas, la suite $\{y_t\}$ n'a pas de condition initiale et c'est la représentation (2) qui parait la plus appropriée. Par exemple, $y_t > 0$ peut être le cours boursier, $1/a > 1$ le facteur d'actualisation et $-b > 0$ le dividende ; le cours boursier n'est, en effet, pas prédéterminé puisqu'il dépend de l'anticipation des dividendes et des cours *futurs* (à la différence, disons, du stock de capital). On dit alors que la variable y_t est *non prédéterminée,* ou *libre.* Si une condition de transversalité est imposée pour exclure les dynamiques non bornées comme les bulles rationnelles, alors il existe, soit un équilibre exactement (lorsque $|a| > 1$), soit une infinité d'équilibres de prévisions parfaites (si $|a| < 1$). En effet, lorsque $|a| > 1$, alors la seule trajectoire non explosive de y_t est $\{y^*\}_{t=0,1,...\infty}$, de sorte que y_t (qui est une variable libre) se fixe à la valeur y^* dès la date 0 et jusqu'à l'infini. Cette situation correspond à la configuration II du graphique n°1, les trajectoires explosives en moins. En revanche, lorsque $|a| < 1$ toute valeur de y_0 engendre une suite convergente tendant asymptotiquement vers y^*, comme nous l'avons vu dans la section I. Comme y_0 n'est pas prédéterminée, la valeur initiale de $\{y_t\}$, et donc l'équilibre de prévisions parfaites sélectionné, est arbitraire. On est alors dans une situation d'*indétermination de l'état stationnaire* y^*, puisque celui-ci est bien entouré d'un *continuum* d'équilibres non stationnaires de prévisions parfaites. C'est la situation représentée sur la configuration III du graphique n° 1. Elle révèle que, dans un cadre linéaire univarié, deux conditions sont nécessaires (mais aussi suffisantes) à l'indétermination de l'équilibre de long terme : la *non prédétermination* de la variable considérée et la *convergence de la suite correspondante.*

En conclusion, lorsque l'on exclut les trajectoires de bulles non-bornées, le nombre d'équilibres dynamiques de prévisions parfaites dépend à la fois de la convergence de la suite ($|a| < 1$ ou $|a| > 1$) et du statut de la variable y_t (prédéterminée ou non). Ces résultats sont résumés à l'aide du tableau suivant (voir Blanchard et Kahn, 1980, pour une généralisation au cadre multivarié) :

Tableau n° 1
Nombre d'équilibres dynamiques d'un modèle univarié

	$|a| < 1$	$|a| > 1$
y_t prédéterminé	1	0
y_t libre	∞	1

Les dynamiques qui viennent d'être mises en évidence sont des dynamiques de prévisions parfaites, c'est-à-dire qu'elles sont purement déterministes : la sélection de la variable y_0 par les agents les conduit sur une trajectoire convergente qui est connue avec certitude dès la période 0. On considère maintenant la généralisation de ces processus à des dynamiques *stochastiques,* caractérisées par des sauts à chaque période entre les différentes trajectoires de prévisions parfaites du modèle.

De l'indétermination de l'équilibre aux équilibres de « taches solaires »

L'indétermination de l'équilibre de long terme engendre une multiplicité de trajectoires qui sont *non stationnaires et déterministes.* Cette indétermination permet de construire une multiplicité d'équilibres stochastiques caractérisés par des *fluctuations stationnaires* de $\{y_t\}$ autour de y^*.

Supposons que la variable y_t n'est pas prédéterminée, et que les agents pensent qu'elle est sujette à des fluctuations aléatoires. La généralisation de la dynamique aux anticipations rationnelles s'écrit alors :

$$y_t = E_t(y_{t+1})/a - b/a \qquad (3)$$

Considérons la famille de processus stochastiques stationnaires suivants :

$$y_{t+1} = ay_t + b + \eta_{t+1}, \qquad (4)$$

où $\{\eta_t\}_{t=0,1,\ldots\infty}$ est un processus de bruit blanc de moyenne nulle, de sorte que $E_t(\eta_{t+1}) = 0$. Tout processus (4) vérifie l'équation (3) et constitue donc une solution d'équilibre potentielle. Remarquons néanmoins que si $|a| > 1$, alors un choc sur la variable y_t la conduit sur une trajectoire explosive et donc non-bornée. Un processus comme celui qui est décrit par l'équation (4) n'est donc compatible avec la condition aux bornes de la suite que lorsque $|a| < 1$, c'est-à-dire lorsque l'état stationnaire y^* est indéterminé. Le processus $\{\eta_t\}$ s'interprète alors comme un *choc sur les croyances des agents,* c'est-à-dire une source d'incertitude déconnectée des fondamentaux de l'économie, à l'instar des « taches solaires ». Ces chocs provoquent des sauts à chaque période d'une trajectoire de prévision parfaite à une autre, et c'est la répétition de ces sauts à chaque période qui engendre un processus stochastique stationnaire du type de celui qui est décrit par l'équation (4).

On vient de montrer le lien entre l'indétermination de l'équilibre stationnaire et l'existence d'équilibres de tache solaire dans un modèle linéaire et *ad hoc*. Ces phénomènes sont néanmoins beaucoup plus généraux, et peuvent notamment apparaître dans des modèles d'évaluation d'actifs parfaitement microfondés.

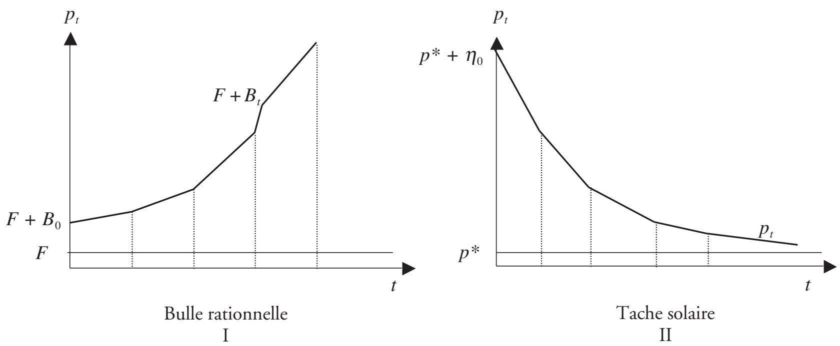
Prophéties auto-réalisatrices et volatilité boursière

Dans Challe (2003a, 2003b), le comportement dynamique des cours boursiers sous l'influence des prophéties auto-réalisatrices des investisseurs est analysé dans le cadre d'un modèle d'évaluation d'actifs à générations imbriquées. Le modèle implique qu'à l'équilibre les prix d'actifs suivent un processus auto-régressif du type suivant :

$$p_{t+1} = p^*(1 - a) + a\, p_t + \eta_{t+1}, \qquad (5)$$

où a est une constante telle que $0 < a < 1$, p^* est le prix moyen de l'actif, et $\{\eta_t\}$ un bruit blanc de moyenne nulle. L'équation (5) est formellement semblable à l'équation (4) et s'interprète de manière analogue : $\{\eta_t\}$ est une série de chocs sur les croyances des agents, dont la présence contribue à augmenter la volatilité boursière relativement à la volatilité qui serait impliquée par les fluctuations des fondamentaux exclusivement. La nature auto-régressive du processus (5) révèle que les équilibres de taches solaires se caractérisent par des déviations *transitoires mais convergentes* des prix à leur valeur de long terme p^*, et non par des trajectoires divergentes comme c'était le cas des équilibres de bulle étudiés dans la section II. Le contraste entre ces deux phénomènes est illustré sur le graphique n° 3, qui représente la dynamique d'ajustement du prix suite à un choc de croyance (une « tache solaire ») se produisant à la période 0, et la compare à une bulle rationnelle commençant à la période 0.

Graphique n° 3
Dynamique de bulle rationnelle et dynamique de tache solaire



Nous terminerons cette sous-section en expliquant brièvement pourquoi les équilibres de taches solaires résistent aux trois critiques principales adressées à la théorie des bulles rationnelles. En premier lieu, un processus de prix comme celui qui est décrit par l'équation (5) ne dépasse jamais les limites de marché, pourvu que la variance des chocs ne soit pas trop importante. Cette propriété est due au fait que l'équation (5) décrit un processus stochastique *stationnaire* et donc *borné supérieurement* (il existe un prix p_{sup} tel que $p_t < p_{sup}$ pour tout t et pour toute suite $\{\eta_{t+1}\}$). En second lieu, la volatilité engendrée par les prophéties auto-réalisatrices engendre un risque endogène pour l'investisseur et réduit son utilité s'il est averse au risque ; de manière générale, les équilibres de taches solaires sont donc *pareto-dominés par les équilibres sans tache solaire,* qui sont nécessairement moins volatiles. Enfin, la propriété de stationnarité du processus stochastique gouvernant l'évolution des prix implique que la condition selon laquelle le processus de chocs est un bruit blanc est compatible avec une réalisation non nulle des chocs, lesquels peuvent être soit négatifs, soit positifs ; cela signifie que le prix peut dévier de sa valeur de long terme à la période t+1 même s'il n'en déviait pas à la période t. Des sauts entre les différentes trajectoires de prévisions parfaites peuvent ainsi se produire à chaque période et engendrer une volatilité de marché purement endogène.

Sous quelles conditions un modèle d'équilibre général est-il ouvert aux prophéties auto-réalisatrices des agents ?

Les modèles théoriques auxquels nous venons de faire référence illustrent le fait que l'émergence des équilibres de taches solaires n'est pas liée à l'absence de contraintes d'équilibre général ou à une microfondation incomplète des comportements des agents. On sait par ailleurs que les équilibres concurrentiels du modèle de référence de la théorie de l'équilibre général, le modèle de Arrow-Debreu, sont caractérisés par deux propriétés essentielles : ils sont *localement uniques* et ils sont *pareto-optimaux.* Comme l'indétermination de l'équilibre et les fluctuations auto-réalisatrices des variables sont en contradiction avec ces deux propriétés, on suspecte que les hypothèses des modèles qui les engendrent doivent s'écarter substantiellement du cadre théorique du modèle de Arrow-Debreu.

On sait depuis longtemps que le modèle à générations imbriquées diffère de ce cadre théorique général, par la simple observation que certaines de ses versions donnent lieu soit à une multiplicité d'états stationnaires, soit à une sous-optimalité des équilibres, soit aux *deux.* Le modèle monétaire de Samuelson (1958) comporte ainsi deux états stationnaires, dont l'un, l'équilibre autarcique, est sous-optimal. L'équilibre du modèle à générations imbriquées avec accumulation de capital est lui aussi fréquemment caractérisé par une sous-optimalité de l'équilibre concurrentiel (Diamond, 1965), et peut donner lieu à une multiplicité d'états stationnaires, même lorsque l'on impose aux préférences et à la technologie les conditions de régularité habituelles (Galor et Ryder, 1991). Dans le cas du modèle de Samuelson, Shell (1977) a montré que l'existence d'équilibres sous-optimaux, en sus de l'équilibre optimal, était imputable au fait que l'économie considérée comportait à la fois une infinité de biens et une infinité d'agents, alors que les théorèmes du bien-être qui garantissent l'unicité et l'optimalité de l'équilibre concurrentiel ne s'appliquent qu'à des économies dans lesquelles les agents sont en nombre fini (même si ces théorèmes s'accommodent d'une quantité infinie de biens, notamment lorsqu'il s'agit de biens datés d'une économie intertemporelle). La relation entre une structure à générations imbriquées et l'existence d'équilibres de taches solaires est plus subtile. Cass et Shell (1983) ont montré qu'elle était liée à la participation incomplète des agents au marché impliquée par la structure du modèle, qui empêche les agents qui ne sont pas encore présents sur le marché de s'assurer contre une tache solaire susceptible d'influencer leur utilité lorsqu'ils le seront. Kehoe et Levine (1985) présentent une étude très générale de l'indétermination de l'état stationnaire dans les modèles d'équilibre général à horizon infini. Ils montrent que dans des économies composées d'un nombre fini d'agents à durée de vie infinie, comme celles qui sont décrites par les modèles à « agent représentatif », l'état stationnaire est génériquement déterminé dès lors que les conditions de régularité qui assurent son existence et son unicité sont vérifiées. Les auteurs montrent, en revanche, que le modèle à générations imbriquées, qui est peuplé d'un nombre infini d'agents de durée de vie finie, comportent en général plusieurs équilibres stationnaires, dont certains sont sous-optimaux. Ces équilibres stationnaires sont, à leur tour, fréquemment indéterminés, c'est-à-dire entourés d'un continuum de trajectoires d'équilibres non stationnaires semblables à celles qui furent présentées dans la section I.

Quoique le modèle à générations imbriquées constitue un cadre privilégié dans lequel construire des économies où coexistent plusieurs équilibres, les phénomènes étudiés dans les sections précédentes ne s'y limitent pas, et d'autres écarts au modèle de Arrow-Debreu peuvent être envisagés. En premier lieu, l'introduction d'une contrainte financière, qui représente une forme particulière d'incomplétude des marchés, a été étudiée par Woodford (1986b), qui montre qu'elle est susceptible de rendre l'état stationnaire indéterminé. On peut également introduire des non convexités dans les fonctions de demande excédentaire, soit par le biais de rendements d'échelles croissants dans l'utilisation du capital, soit par l'introduction d'une structure de marché à concurrence imparfaite. C'est aujourd'hui le chemin suivi par un grand nombre de modèles d'équilibres général à agent représentatif ouverts aux prophéties autoréalisatrices (voir Farmer, 1999, et Benhabib et Farmer, 1999 pour une présentation de ces approches).

Cet article a cherché à évaluer la capacité des modèles d'équilibres multiples à rendre compte de la volatilité importante des cours boursiers. L'analyse de cette classe de modèles révèle que l'hypothèse d'anticipations rationnelles, apparemment restrictive puisqu'elle exclut d'emblée la rationalité limitée des investisseurs comme source possible de volatilité excessive, constitue, au contraire, un puissant vecteur d'instabilité financière dès lors que l'équilibre financier n'est pas unique. Cette instabilité se manifeste par la présence d'un risque endogène, *créé par les agents eux-mêmes via leurs anticipations sur l'avenir,* qui s'ajoute au risque fondamental analysé par les modèles d'évaluation traditionnels. De ce point de vue, et compte tenu des limites rencontrées par les équilibres de bulles rationnelles et de défauts de coordinations, il a été avancé que les équilibres de taches solaires constituaient l'approche la plus cohérente capable de rendre compte des phénomènes liés à la volatilité boursière « excessive ».

L'application des modèles d'équilibres multiples à l'évaluation boursière étant encore relativement peu développée, il n'est pas très étonnant que les hypothèses qui les sous-tendent apparaissent parfois quelque peu *ad hoc* ou irréalistes. Notamment, l'utilisation presque systématique du modèle à générations imbriquées apparaît peu satisfaisante, car elle impose, plutôt qu'elle n'explique, les restrictions imposées à la participation des agents au marché. Il paraît donc indispensable de tester la robustesse des conclusions tirées à l'aide de modèles théoriques plus généraux, dans lesquels les frictions et incomplétudes de marché, qui démultiplient le nombre d'équilibres par rapport à une économie à la Arrow-Debreu, sont rendues parfaitement explicites.

NOTES

1. Notamment au travers des travaux de Calvo (1978), Azariadis (1981), et Azariadis et Guesnerie (1982).

2. Pour une analyse empirique approfondie des anomalies liées à la volatilité excessive des cours, on pourra se référer à l'ouvrage de Shiller (1989).

3. Pour une critique des implications empiriques de la théorie des bulles rationnelles, on pourra consulter West (1988) et Camerer (1989).

4. On peut trouver un autre exemple de multiplicité d'équilibres dans le modèle de Gennotte et Leland (1990), chez qui l'hétérogénéité informationnelle provoque une non linéarité dans la courbe de demande d'actifs agrégée.

5. L'expression de « tache solaire » vient du fait que, sur de tels équilibres, des phénomènes aussi déconnectés des fondamentaux que les taches solaires peuvent influencer les grandeurs économiques par le seul biais de la croyance des agents en leur influence. Le terme de « tache solaire » est synonyme de « prophétie auto-réalisatrice », et recouvre toute forme d'incertitude non-fondamentale influençant les grandeurs d'équilibre.

BIBLIOGRAPHIE

P. ARTUS (1993), « Défauts de coordination des activités : principes et exemples », *Revue Économique,* 3, mai, pp. 551-569.

C. AZARIADIS (1981), « Self-fulfilling prophecies », *Journal of Economic Theory,* 25, pp. 380-96

C. AZARIADIS et S. CHAKRABORTY (1998), « Asset price volatility in a noncovex general equilibrium model », *Economic Theory,* 12, pp. 649-665.

C. AZARIADIS et R. GUESNERIE (1982), « Prophéties créatrices et persistance des théories », *Revue Économique,* 33, pp. 787-806.

J. BENHABIB et R.E.A. FARMER (1999), "Indeterminacy and sunspots in macroeconomics", in J.B. TAYLOR et M. WOODFORD (éd.), *Handbook of Macroeconomics,* Vol. 1A, pp. 387-448.

F. BLACK (1974), "Uniqueness of the price level in monetary growth models with rational expectations", *Journal of Economic Theory,* 7, pp. 53-65.

O.J. BLANCHARD (1979), "Speculative bubbles, crashes, and rational expectations", *Economics Letters,* 3, pp. 387-389.

O.J. BLANCHARD et KAHN C.M. (1980), "The solution of linear difference models under rational expectations", *Econometrica,* 48(5), juillet, pp. 1305-1311.

O.J. BLANCHARD et M.W. WATSON (1984), « Bulles, anticipations rationnelles et marchés financiers », *Annales de L'INSEE,* 54, avril-juin, pp. 88-99.

G. CALVO (1978), "On the indeterminacy of interest rates and wages with perfect foresight", *Journal of Economic Theory,* 19, pp. 321-337.

J.Y. CAMPBELL (1999), "Asset prices, consumption, and the business cycle", in J.B. TAYLOR et WOODFORD M. (éd.), Handbook of Macroeconomics, Vol. 1C, pp. 1231-1303.

C. CAMERER (1989), "Bubbles and fads in asset prices", *Journal of Economic Surveys,* 3(1), pp. 3-41.

D. CASS et SHELL K. (1983), "Do sunspots matter?", *Journal of Political Economy,* 91(2), pp. 193-227.

E. CHALLE (2003a), "Sunspots and predictable returns", *Journal of Economic Theory,* à paraître.

E. CHALLE (2003b), « Psychologie de marché et volatilité des prix d'actifs : le rôle des prophéties auto-réalisatrices », *Document de Travail FORUM* 2003-12, décembre.

R.W. COOPER et A. JOHN (1988), "Coordinating coordination failures in Keynesian models", *Quarterly Journal of Economics,*

P.A. DIAMOND (1965), "National debt in a neoclassical growth model", *American Economic Review,* 55(5), décembre, pp. 1125-1150.

B.T. DIBA et GROSSMAN H.I. (1987), "On the inception of rational bubbles", *Quarterly Journal of Economics,* 102(3), août, pp. 697-700.

B.T. DIBA et GROSSMAN H.I. (1988), "The theory of rational bubbles in stock prices", *Economic Journal,* 98, septembre, pp. 746-754.

R.E.A. FARMER (1999), *The Macroeconomics of Self-fulfilling Prophecies,* MIT Press, 2ème édition, 300 pages.

K.A. FROOT et M. OBSFELD (1991), "Intrinsic bubbles : The case of stock prices", *American Economic Review,* 81(5), décembre, pp. 1189-1214.

O. GALOR et H. RYDER (1989), "Existence, uniqueness, and stability of equilibrium in overlapping generations models with productive capital", *Journal of Economic Theory,* 49, pp. 360-375.

G. GENOTTE et LELAND H. (1990), Market liquidity, hedging and crashes, *American Economic Review* 80(5), décembre, pp. 999-1021.

T.J. KEHOE et LEVINE D. (1985), "Comparative static and perfect foresight in infinite horizon economies", *Econometrica,* 53(2), mars, pp. 433-53.

R. LUCAS (1978), "Asset prices in an exchange economy", *Econometrica,* 46(6), novembre, pp. 1429-1445.

M. PAGANO (1989), "Endogenous market thinness and stock-price volatility", *Review of Economic Studies,* 56, pp. pp. 269-288.

P. SAMUELSON (1958), "An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money", *Journal of Political Economy,* 66, décembre, pp. 467-82.

M.S. SANTOS et M. WOODFORD (1997), "Rational asset pricing bubbles", *Econometrica,* 65(1), pp. 19-57.

K. SHELL (1977), "Notes on the economics of infinity", *Journal of Political Economy,* 79(5), pp. 1002-1011.

R.S. SHILLER (1989), *Market Volatility,* MIT Press, 464 pages.

J. TIROLE (1982), "On the possibility of speculation under rational expectations", *Econometrica,* 50(5), septembre, pp. 1163-1181.

J. TIROLE (1985), "Asset bubbles and overlapping generations", *Econometrica,* 53(6), novembre, pp. 1499-1458.

P. WEIL (1987), "Confidence in the real value of money in an overlapping generations economy", *Quarterly Journal of Economics,* 102(1), février, pp. 1-22.

K.D. WEST (1988), "Bubbles, fads and stock-price volatility tests : a partial evaluation", *Journal of Finance,* 43(3), juillet, pp. 639-661.

M. WOODFORD (1986a), "Sationary sunspots equilibria : the case of small fluctuations around a deterministic steady state", mimeo, Université de New-York, 74 pages.

M. WOORDFORD (1986b), "Stationary sunspots equilibria in a finance constrained economy", *Journal of Economic Theory* 40, pp. 128-137.