PRIX DU RISQUE ET RATIONALITÉ

BERTRAND MUNIER*

La nouvelle culture ne réconciliera pas seulement
les sciences exactes et humaines
mais le savoir rationnel le plus avancé
avec l'éthique et l'inquiétude religieuse

Michel Serres

Le concept de risque n'est sans doute pas la chose du monde la mieux partagée. Pertes maximales possibles pour les uns, il évoque pour d'autres une dispersion des résultats alternatifs possibles, tandis que pour d'autres encore, gérer les risques signifie gérer les catastrophes - vision exclusivement ex post.. L'Anglais distingue ainsi danger (le péril), hazard (la source potentielle d'accident), chance (la possibilité d'événements divers), risk (la situation où les possibles sont mesurés) et finalement uncertainty (la situation où l'on ne peut fournir de mesure des possibles). On se doit de retenir cette dernière acception : parler des risques d'une banque, par exemple, n'a guère de sens tant qu'au moins une mesure de l'occurrence possible de ces pertes maximales - par exemple, une mesure de probabilité - n'est pas saisie.

L'intérêt de la fonction de perte bayésienne est de nous munir d'un concept à la fois englobant et précis : il s'agit, dans son acception la plus générale, de la moyenne pondérée par les probabilités p_i (l'espérance mathématique), de l'évaluation, affectée d'un signe négatif, des résultats possibles x_i dans une situation donnée. La situation de risque

* *Professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan et GRID, URA CNRS 1419.*

évoquée peut correspondre à un contrat à signer, à un investissement à effectuer, à un actif financier ou réel à acquérir, etc..., et peut être formalisée comme une loterie : $(x_1, p_1; x_2, p_2 ; ... ; x_n, p_n)$ de façon générique, signifiant que x_1 peut être obtenu avec la probabilité p_1, etc., étant bien entendu que toute connotation ludique doit être écartée du terme. La « fonction de perte » que la théorie bayésienne du comportement rationnel - dite aussi théorie statistique de la décision - exige de minimiser est donc l'expression $-\Sigma p_i . u(x_i)$, où u (.) est une fonction dite d'utilité permettant de traduire l'appréciation des résultats possibles x_i par l'acteur - individu ou comité - concerné. De façon équivalente, les économistes parlent de maximisation d'utilité espérée. Les financiers aussi, quoique la condition d'arbitrage exclu - que l'on retient pour caractériser un marché financier en équilibre - leur semble parfois préférable.

La spécification de la fonction d'utilité peut être très différente selon le point de vue auquel on se place et l'activité économique que l'on considère. Ainsi, le tableau 1 schématise les raisons pour lesquelles cette fonction est en général la fonction identité $u(x_i) = x_i$ pour l'assureur quand elle ne l'est pas pour le gestionnaire de risque - le risk manager - de l'entreprise ou, plus généralement, pour ceux qui cherchent à évaluer une loterie non répliquée, ex ante, et non un portefeuille diversifié massivement de loteries indépendantes concernant des acteurs très divers[1].

Ce tableau laisse entrevoir que la spécification de la fonction d'utilité comme, de façon plus générale, la notion même de rationalité, vont influer directement sur le calcul du prix du risque, et inversement. Le lecteur se sentira sans doute rassuré par le fait que la notion de rationalité bayésienne - maximisation de l'utilité - semble bien établie. Mais fait-elle l'unanimité ? Nous verrons que ce n'est plus le cas aujourd'hui... Le cadre même de modélisation de la décision face au risque est-il pour autant remis en question ? Une enquête auprès d'un échantillon d'entreprises aux Etats-Unis [March et Shapira, 1987] montre que les cadres conçoivent le risque d'entreprise comme une situation fondamentalement différente de celles des jeux de hasard, du fait que des mesures avisées permettent, sinon d'avoir la maîtrise de la situation de risque, du moins de transformer cette situation ou de la contourner, là où les joueurs de salon doivent se soumettre à des règles du jeu acceptées de façon irréversible. Doit-on alors, comme le suggèrent March et Shapira,

1. Cet article ne prétend en aucune manière atteindre une rigueur irréprochable, mais vise plutôt à rendre accessibles à un public plus large quelques concepts de rationalité et de prix du risque récents, extraits d'une littérature théorique souvent écrite pour les seuls spécialistes du domaine. Ces derniers voudront bien excuser quelques approximations vénielles et un langage parfois peu économe de mots et inhabituel pour eux.

renoncer aux concepts établis et concevoir une théorie radicalement différente de la décision rationnelle et du prix du risque, si l'on veut

Tableau 1 :

Décideur	**Gestionnaire des risques ou particulier**	**Assureur**
Logique de l'activité	Evaluation (reposant sur les préférences du ou des décideurs) de décision de prévention non répétitives	Evaluation statistique des nombreuses situations risquées qu'il a accepté de couvrir
Nature de l'évaluation des situations risquées	Cette évaluation ≈ est ex ante du point de vue de la décision de traitement du risque (prévention, transfert, etc.), qui n'est pas encore prise	Cette évaluation est ex post du point de vue des décisions de prévention, qui sont censées respectées a minima
Concepts sous-jacents à l'évaluation	Attitude(s) par rapport au risque de(s) décideur(s) en cause	Loi des grands nombres, neutralité par rapport au risque
Règles de rationalité adoptées	«Utilité espérée» (Bernoulli, 1738 et surtout von Neumann et Morgenstern, 1944) ou fonctionnelles plus récentes et mieux adaptées	Espérance de pertes ou de gains («valeur actuarielle») Pascal-Fermat XVII° Siècle
Expression des critères de choix rationnel utilisés	$\sum_{i=1}^{i=3} p_i u(x_i)$ ou des expressions prenant plus finement en compte l'évaluation psychologique du risque...	$\sum_{i=1}^{i=3} p_i x_i$

pouvoir se servir de celle-ci dans le management des firmes industrielles ou financières ? Nous proposons ici de ne pas 'jeter le bébé avec l'eau du bain' et de retenir une conception plus circonscrite et circonspecte de la révision souhaitable.

Dans une première section, on examinera la conception actuellement la plus répandue du prix du risque, celle du coût qu'inflige (en général) au décideur la dispersion des résultats ; dans une seconde section, on évoquera la mauvaise querelle faite à cette vision des choses par le recours à la condition d'arbitrage exclu pour un portefeuille d'actifs contingents, le prix du risque résultant alors d'une simulation du marché de tels actifs. On examinera enfin, dans une troisième section, les modifications que l'on peut apporter à la notion actuelle de prix du risque, à la lumière de réflexions d'ordre pratique comme en raison d'une vue élargie de la rationalité qu'un nombre croissant d'économistes adoptent : il s'agit d'une sérieuse qualification du point de vue adopté jusqu'ici .

Le prix du risque, évaluation subjective de la dispersion des résultats.

Rappels sur la théorie de la décision face au risque.

On sait que lorsque von Neumann et Morgenstern écrivirent la théorie de l'utilité, ils la définirent comme une relation de préférence ($\propto$: « non préféré à ») permettant d'établir un classement entre des loteries. Ils supposèrent par ailleurs qu'il est toujours possible de réduire des loteries composées (dites 'à deux étages', celles dans lesquelles un résultat d'une première loterie peut être l'accès à une nouvelle loterie) en une loterie simple ('à un étage', où la caractéristique indiquée ne peut exister). Par exemple, si $L^* = (10, 0.5 ; 30, 0.5)$ et $L^{**} = (20, 0.3 ; 25, 0.7)$, une loterie qui composerait L^* et L^{**} avec des probabilités $(\lambda, 1\text{-}\lambda)$ serait équivalente à la loterie 'à un étage' suivante : $(10, 0.5\lambda ; 20, 0.3\,(1\text{-}\lambda) ; 25, 0.7\,(1\text{-}\lambda) ; 30, 0.5\lambda)$. La figure 1 représente graphiquement cette affirmation.

Ils supposèrent aussi qu'il est toujours possible de trouver équivalente à une loterie L donnée la composition de deux loteries L^* et L^{**}, soit $\lambda L^{**} + (1\text{-}\lambda)\, L^*$, en faisant varier de 0 à 1 la probabilité (de la loterie 'de premier étage', pourvu que L soit, du point de vue des préférences, classée 'entre' L^* et L^{**} ($L^* \propto$: $L \propto$: L^{**}), la valeur λ^* qui permet alors d'assurer l'équivalence étant en outre unique (figure 2). On peut montrer que cette propriété dite « Archimédienne » implique une 'continuité' des préférences, dans le sens où celles-ci ne peuvent pas changer brutalement de sens à l'occasion d'une légère modification d'une probabilité (ou d'un résultat possible) pour une loterie. Sur la figure 2, on peut apercevoir que cette caractéristique permet par voie de conséquence de construire des courbes d'indifférence dans l'ensemble $\mathcal{L}$ des loteries possibles.

Figure 1

La composition de deux loteries selon Von Neumann et Morgenstern

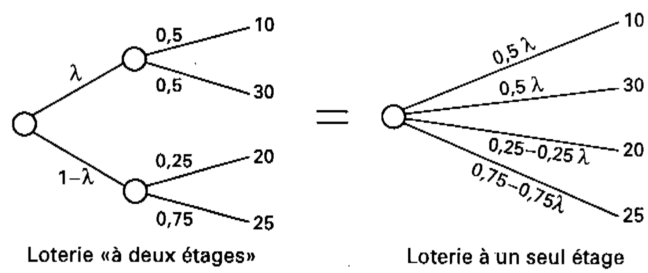
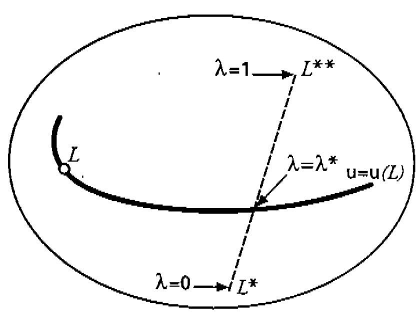


Figure 2

La propriété Archimédienne de la relation de préférence dans l'ensemble des loteries $\mathcal{L}$



Mais von Neumann et Morgenstern ajoutèrent surtout à leur construction théorique un postulat dit « d'indépendance », affirmant que composer deux loteries L* et L** avec une troisième, soit L, dans les mêmes proportions, préserverait entre les loteries composées ainsi obtenues, l'ordre de préférence entre L* et L**. Ainsi :

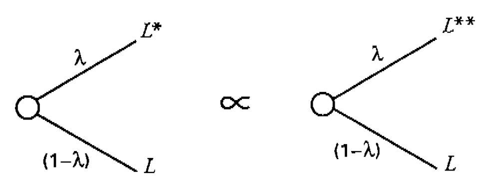
$\forall$ L, L*, L**, λ, avec $0 \leq \lambda \leq 1$,

$L^* \propto L^{**} \Leftrightarrow (\lambda L^* + (1-\lambda) L \propto (L^{**} + (1-\lambda) L$

autrement dit : 'composer' $(1-\lambda)$ L à gauche avec L* et à droite avec L** implique d'avoir entre les deux loteries obtenues le même sens de la relation de préférence qu'entre L* et L** (figure 3).

Figure 3

Axiome d'indépendance : la loterie composée de gauche est dans la même relation ($\propto$) à la loterie composée de droite,sur cette figure, que L^* est à L^{**} ($L^* \propto L^{**}$)



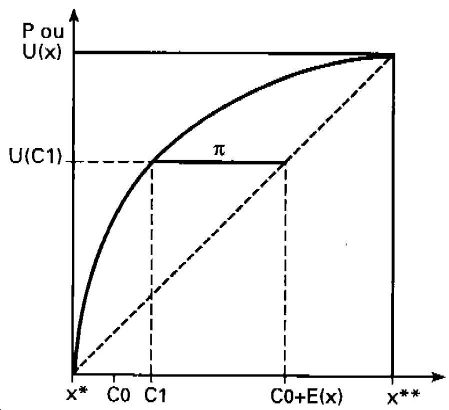
On exclut, par cette propriété d'indépendance, la possibilité que deux projets d'entreprise (deux loteries) puissent avoir une 'synergie due au risque' entre eux, au motif (invoqué comme justification par P.A. Samuelson dans les années 50) que la 'composition' des loteries du côté gauche de la figure 3 aboutit soit à L* , soit à L, jamais aux deux simultanément, et que le même argument vaut pour les loteries composées du côté droit de la figure 3 (où l'on obtient soit L**, soit L, jamais les deux). Cet argument est très contestable, car il se place ex post, alors qu'il s'agit bel et bien de savoir comment l'on évalue ex ante une composition de loteries. Cette vision des choses n'a pas manqué d'être controversée, tant sur le plan descriptif (depuis le 'Paradoxe' d'Allais de 1952) que sur un plan normatif, surtout depuis le début des années 1980 (cf. p.ex. [McClennen, 1990, Munier, 1996]). Mais il est vrai que cet axiome est « commode » car, ajouté aux précédents, il permet de démontrer que le critère d'espérance d'utilité est le seul critère rationnel ([von Neumann et Morgenstern, 1944, Savage, 1954, Anscombe et Aumann, 1963, etc...]). Grâce à lui, on peut en effet rendre opératoire la notion de préférence entre loteries, car il permet d'aboutir au calcul (Théorème de von Neumann et Morgenstern, 1944) suivant :

Pour toute loterie L : $(x_1, p_1; x_2, p_2 ; ...; xn, pn)$, et toute loterie L' : $(y_1, p_1; y_2, p_2 ; ... ; y_n, p_n)$,

$L \propto L' \Leftrightarrow (\Sigma p_i .u (x_i) < \Sigma p_i .u (y_i)$

Il suffit donc d' 'éliciter' de la part d'un individu (ou d'un comité) la fonction u pour pouvoir, au vu de la nature de loteries telles que L et L' ci-dessus, classer entr'elles toutes les loteries considérées dans l'ensemble $\mathcal{L}$. Or, il n'est pas très difficile d'éliciter une fonction telle que u (.) de la part d'un décideur, grâce à une autre conséquence de l'axiome d'indépendance, qui veut que toute loterie à n évènements possibles telle que L ou L' ci-dessus soit équivalente (toujours du point de vue des préférences d'un décideur donné) à une loterie à deux résultats possibles : le pire et le meilleur des xi , soit x* et x** respectivement, sous réserve d'ajuster les probabilités respectives p*=1-p** et p** de ces deux conséquences. Par construction, u (.) est définie sur l'intervalle [x*, x**], ainsi qu'on le voit sur la figure 4.

Figure 4



Carré de Raiffa') : En ordonnées, l'intervalle [0,1] est représenté par la même longueur que l'intervalle [x*, x**] l'est en abscisse. On 'élicite' les préférences vis-à-vis du risque du décideur en recherchant, pour C1 donné, la valeur de u(C1) ou inversement.

Les deux modalités possibles de la définition du prix du risque

Il est alors facile de définir et de représenter graphiquement le prix du risque (associé à la loterie L pour un décideur disposant par ailleurs d'un patrimoine certain C0 (figure 4). Supposons, pour fixer les idées avant même de prendre un exemple, que notre décideur n'apprécie pas le risque (comme la plupart d'entre nous dans la plupart des cas) et qu'il s'agisse d'une loterie (un contrat d'équipement de l'entreprise, par exemple) dont l'espérance de résultat, E(x), est positive. Il convient alors de procéder comme suit :

— On détermine la valeur actuarielle de la loterie, soit $E(x) = \sum_i p_i x_i$. Le patrimoine espéré du décideur qui a acquis la loterie est donc de C0+ E(x).

— On demande au décideur quel patrimoine certain C1 serait équivalent à ses yeux à cette valeur espérée $C_0 + E(x)$ de son patrimoine. Par définition, il s'agit d'une somme C1 telle que :

$$u(C1) = E[u(C_0 + x)]$$

— Pour se 'débarrasser' de la loterie x et la remplacer la dispersion des résultats qu'elle implique par un résultat non ambigü, l'individu serait donc prêt à la céder à un prix de vente (« ask price ») p_v tel que : $p_v = C1 - C_0$. Or, si l'individu était « neutre » par rapport au risque, c'est-à-dire s'il était indifférent entre une somme en espérance et la même somme en situation certaine, il vendrait la loterie à un prix égal à E(x), soit à sa valeur actuarielle. *L'aversion au risque* peut ainsi être mesurée par la baisse de prix que l'individu consent, par rapport à la valeur actuarielle, sur la vente de la loterie afin de se débarrasser d'une dispersion, qu'il n'apprécie pas, des résultats possibles. C'est cette *baisse de prix de vente* qui constitue le « prix du risque » à proprement parler, soit ici ($\pi = E(x) - p_v$. En effet, on pourrait imaginer d'appeler « prix du risque » le prix de vente lui-même de la loterie x. Mais celui-ci est influencé *à la fois* par l'aversion (ou l'inclination) au risque de l'agent économique concerné et par la valeur actuarielle de la loterie, tandis que π n'est, lui, influencé que par l'attitude par rapport au risque, du fait même de sa définition.. Celle-ci peut s'écrire :

$\pi = E(x) - p_v = E(x) - (C1 - C_0) = C_0 + E(x) - C1$, ce que la figure 4 représente. Il est facile de voir que la concavité de la fonction d'utilité u(.) entraînera un prix du risque positif (on parle d'aversion pour le risque, c'est le cas représenté sur la figure 4), une fonction linéaire commandera un prix du risque nul (on parle de « neutralité » par rapport au risque) et une fonction convexe un prix du risque négatif (on parle alors d'inclination au risque). Ce dernier cas ne doit pas être confondu avec le 'plaisir de jouer', que nous ne prenons pas en considération ici, où nous n'envisageons l'évaluation d'un projet risqué qu'en fonction des résultats possibles de celui-ci, s'agissant de décision rationnelle.

Comme on le voit à l'issue du raisonnement précédent en trois étapes (valeur actuarielle, prix de vente de la loterie, prix du risque π, on peut aussi écrire la définition de $p_v = E(x) - \pi$ comme :

$$u[C_0 + E(x) - \pi] = E[u(C_0 + x)]$$

c'est-à-dire que le prix de vente de la loterie peut aussi être défini comme la somme minimale susceptible de restaurer le niveau d'utilité d'un agent économique lorsque celui-ci vend un contrat risqué (on parle en Anglais de *breakeven selling price*).

On peut toutefois faire remarquer que l'on aurait pu adopter une autre définition cohérente du prix du risque en écrivant :

$u[C_0] = E[u(C_0 + x - p_a)]$

On aurait alors cherché par là à évaluer le prix maximum p_a que le décideur serait prêt à payer pour acquérir le contrat risqué x, soit la somme maximale que le décideur pourrait accepter de payer et qui serait compensée par l'avantage obtenu lorsque le décideur achète un contrat risqué (on parle en Anglais de *breakeven buying price*)[2].

On obtient ainsi un prix du risque $\pi^* = E(x) - p_a$ la plupart du temps légèrement différent de π, dans la mesure où, sauf pour certaines fonctions d'utilité, on observe généralement $p_a \neq p_v$. Pour quelle raison ?

Pour le comprendre, notons d'abord que l'on peut disposer d'une technique d'évaluation approchée de π. Il s'agit d'un résultat établi par Pratt et par Arrow, de façon indépendante, en 1964 :

$\pi \approx 1/2\sigma^2 . [- U''[C_0 + E(x)] / U'[C_0+E(x)]] = 1/2\, \sigma^2 . \mathcal{A}[C_0 + E(x)]$

$\pi^* \approx 1/2\, \sigma^2 . [- U''[C_0] / U'[C_0]] = 1/2\, \sigma^2 . \mathcal{A}[C_0]$

Le coefficient A (C) dit coefficient d'aversion au risque absolue (ou coefficient d'Arrow-Pratt) est positif si U est concave, comme on vient de le voir, négatif si U est convexe, et sa valeur peut parfaitement varier avec le niveau de richesse C. Dès lors que E(x) est différent de 0, on comprend donc que les valeurs numériques du patrimoine C et partant les valeurs numériques de $\mathcal{A}$ utilisées pour le calcul de l'un et de l'autre de ces deux prix (breakeven selling price et breakeven buying price) sont différentes : Dans la mesure où $\mathcal{A}$ - coefficient d'aversion au risque - varie avec le niveau de patrimoine pour un décideur donné, les prix d'achat et de vente d'une même loterie peuvent différer entr'eux. Lorsque $\mathcal{A}(C)$ est croissant avec C, on dit que l'aversion absolue au risque est croissante ($\mathcal{A}'(C) > 0$) tandis que, lorsque $\mathcal{A}(C)$ est décroissant quand le niveau de patrimoine s'accroît, on dit que l'aversion absolue au risque est décroissante ($\mathcal{A}'(C) < 0$). Lorsque l'aversion absolue au risque est constante (fonction d'utilité exponentielle de C), ($\mathcal{A}'(C) = 0$), il est immédiat de vérifier que l'on aura, par exception, $p_a = p_v$, et donc $\pi^* = \pi$ pour tout contrat risqué.

Dans le cas évidemment très particulier où l'aversion au risque est nulle, on a affaire à une fonction d'utilité qui est représentable par une droite, et qui est donc une expression du type a.C + b du patrimoine C. La règle d'utilité espérée coïncide alors avec la règle de gain maximal espéré (ou de valeur maximale espérée). Le coefficient d'Arrow-Pratt est évidemment nul et l'on dit que le décideur est « neutre » par rapport au risque. Dans ce cas, $p_a = p_v = E(x)$ et donc $\pi^* = \pi = 0$. On rejoint, pour des raisons exposées de façon intuitive[3] dans le tableau 1, la règle de décision rationnelle utilisée par les assureurs.

2. On dit, suivant une terminologie standard chez les économistes, que π (la notion de prix du risque la plus fréquemment utilisée de très loin) est une « variation équivalente », π^* une « variation compensatrice ».
3. Une justification plus rigoureuse peut être trouvée à partir du théorème d'Arrow-Lind évoqué quelques lignes plus loin.

On voit ainsi ce qui a fondé au départ toute l'analyse économique du risque : les agents à aversions au risque respectives différentes peuvent échanger un contrat risqué donné et cependant tirer chacun avantage de l'opération. En particulier, on comprend pourquoi un assureur peut vendre un contrat à un assuré, ce dernier ayant de l'aversion au risque alors que l'assureur n'en a pas. De même, le théorème d'Arrow-Lind [Arrow et Lind, 1972] montre qu'une population d'agents caractérisée, au niveau individuel, par la règle rationnelle de l'utilité espérée doit juger ses choix collectifs selon un critère de neutralité par rapport au risque. Ceci justifie - sous réserve de l'hypothèse d'utilité espérée - que l'Etat soit son propre assureur. Mais ceci explique aussi que la théorie de la valeur ne tienne pas compte des diverses aversions au risque possible : au niveau du marché, l'équilibre révèle des probabilités « risque-neutres » qui, combinées aux montants monétaires en jeu sans le prisme d'une fonction d'utilité, fournissent les évaluations de choix risqués « objectives » du marché.

La théorie des prix d'actifs contingents permet-elle une critique des théories de la valeur et du risque ?

L'analyse conduite jusqu'ici l'a été dans un cadre statique et l'on peut légitimement se demander si elle se généralise au cas intertemporel. Cette question a été à l'origine de demandes de révision, voire de rejet, de la théorie du risque et de la théorie de la valeur de marché en environnement risqué exposées ci-dessus. Les arguments s'appuient sur la théorie financière des actifs contingents. Nous verrons que de telles révisions ne seraient pas fondées et que les arguments avancés ne reposent que sur des applications incorrectes des théories incriminées.

On sait que la considération des chroniques de flux de trésorerie pour un agent économique a conduit I. Fisher [Fisher, 1907] à une extension de la théorie de la valeur statique à la notion d'actualisation, et, au-delà, à l'utilisation de l'actualisation en univers risqué, dont les fondements ont été jetés dans les années Cinquante et au début des années Soixante [Allais, 1953, Debreu, 1959] et que l'on considèrera ici comme connue.

La nouveauté apparente des années 1980-1990 vient de ce que plusieurs auteurs, depuis Trigeorgis et Mason [1987] notamment, ont voulu affirmer que les théories de la valeur et du risque formulées par les économistes ne tiennent pas compte de la flexibilité qui caractérise nombre de projets d'entreprise et qu'elles étaient donc inadéquates pour évaluer des projets risqués, et donc pour fonder une conception correcte du prix du risque. La question qui se pose aux dirigeants d'une firme est rarement de faire ou de ne pas faire, raisonnent justement (jusqu'ici) nos auteurs. Elle peut admettre aussi la réponse qui consiste

- pour se limiter à ce cas-là - à différer le projet, à travers l'achat d'une licence, par exemple, et à attendre une date ultérieure (échéance de la licence) à laquelle on pourra, soit abandonner la licence et le projet, soit réaliser le projet à un certain coût (plus élevé qu'au départ en général) même si une partie de la demande a été perdue à ce moment-là. La problématique qui découle de cette vision est similaire à celle qu'offre, en finance de marché, une option d'achat américaine. D'où l'idée de concevoir le problème de l'évaluation correcte d'un projet risqué comme l'obtention d'une évaluation actuelle du projet (que l'on assimile à l'évaluation de l'actif sous-jacent à l'option) en fonction du coût du projet (que l'on rapprochera du prix d'exercice fixé dans l'option), comme si le projet considéré par l'entreprise était un actif échangeable sur un marché.

Un exemple simple permettant de comparer les théories en jeu

Le plus simple pour exposer le raisonnement auquel on peut être conduit dans ce cas est de prendre un exemple, inspiré de Trigeorgis et Mason [1987], repris par Copeland, Koller et Murrin [1990] ainsi que par Allaz [1990], et que Nau et McCardle [1991] puis Smith et Nau [1995] ont remis en question. Nous reprenons ici les données chiffrées des derniers cités, mais le problème est rigoureusement le même dans les cinq contributions référencées.

Considérons donc un cas stylisé et simple à deux périodes (aujourd'hui, demain). Supposons que l'occcasion soit offerte à une entreprise d'investir 104 millions d'Euros (104.10^6EU) aujourd'hui pour construire une usine qui, demain, procurera des rentrées selon un niveau de demande risqué. Les rentrées seront soit de 180.10^6 EU si la demande est favorable, soit de 60.10^6 EU si la demande est défavorable. La firme considère les deux modalités de la demande de demain comme de probabilités respectives égales, soit 0.5 pour chaque éventualité.

Considérons aussi la possibilité pour l'entreprise d'acquérir une licence qui permette de repousser la construction de l'usine jusqu'à ce que l'état de la demande soit connu. Admettons qu'alors la firme ait le choix entre renoncer à l'investissement ou, alternativement, y procéder pour un coût qui serait de 104 (1+.08) = $112.32\ .10^6$ EU (.08 est le taux d'actualisation, soit le taux d'intérêt sur actif sans risque). Les rentrées (cash flows) possibles peuvent être présentées comme dans le tableau 2 ci-dessous. On notera que la dernière décision possible est celle d'attendre, qui se subdivise en deux sous-décisions possibles (c'est l'effet de la flexibilité) demain, c'est-à-dire investir ou renoncer. D'où la subdivision en deux lignes des trois cases inférieures du tableau.

Tableau 2 : Cash-flows possibles (période 0, période 1) du projet pris comme exemple

Demande / **Décisions**	**Favorable**	**Défavorable**
Investir aujourd'hui	(-104, 180)	(-104, 60)
Renoncer dès aujourd'hui	(0, 0)	(0, 0)
Attendre puis investir demain	(0, 67.68)	(0, -52.32)
Attendre puis renoncer demain	(0, 0)	(0, 0)

Actifs contingents et évaluation par recherche de l'arbitrage exclu

La théorie des actifs contingents et de l'évaluation par recherche d'exclusion d'arbitrage potentiel (on parle, en Anglais, d'arbitrage pricing) conduit à se demander comment le marché évaluerait un portefeuille de titres qui parviendrait à 'mimer' parfaitement la loterie correspondant à l'investissement considéré. On considérera donc ici un titre dont on peut supposer qu'il évolue en fonction des mêmes évènements que le projet considéré (ce titre est appelé pour cette raison le titre 'jumeau' du projet), dont on supposera que le prix actuel est de 20 EU, dont le prix serait dans la période à venir de 36 EU en cas de demande favorable et de 12 EU en cas de demande défavorable. On considérera par ailleurs l'actif sans risque déjà évoqué, dont le taux est 8%, et qui permet d'emprunter (ventes à découvert) ou de placer à ce taux.

Constituons d'abord un portefeuille qui 'mime' la stratégie «investir aujourd'hui » : il suffit d'acquérir pour cela 5. 10^6 unités du titre jumeau. Leur valeur actuelle (brute) est de 100. 10^6EU, d'où il convient de soustraire le coût de l'investissement pour obtenir la valeur nette du projet. Cette dernière est donc de (100 - 104) . 10^6 EU, soit -4. 10^6 EU.

L'opération est évidemment triviale pour la stratégie « renoncer dès aujourd'hui » : le portefeuille vide rapporte 0 mais il n'y a pas de coût d'investissement et la valeur nette de cette stratégie est nulle.

Mais c'est dans le cas de la stratégie « attendre » que, d'après les auteurs cités, l'application du raisonnement va révéler ce qu'ils voient comme des insuffisances de la théorie du risque exposée ci-dessus. Constituons en effet un portefeuille mimant les deux sous-stratégies à la fois. C'est possible en utilisant les deux titres évoqués plus haut, le titre sans risque et le titre jumeau, et en admettant les ventes à découvert le cas échéant. On obtient un système de deux équations du premier degré dont les paramètres sont les rendements des deux titres (1.08 EU et 36 EU respectivement) et les inconnues le nombre de titres sans risque à acquérir, X0, et le nombre de titres jumeaux à acquérir, X1. Il vient :

$X0 .(1.08 \text{ EU}) + X1.(36 \text{ EU}) = 67.68 \,.\, 10^6 \text{ EU}.$

$X0 .(1.08 \text{ EU}) + X1.(12 \text{ EU}) = 0$

On obtient X0 = -31.33 millions de titres sans risque et X1 = 2.82 millions de titres jumeaux. Le portefeuille mimant la stratégie « attendre » consiste donc à emprunter (vendre à découvert) 31.33 millions de titres de valeur actuelle 1 EU et à acquérir 2.82 millions de titres de valeur actuelle égale à 20 EU. La valeur du projet actuelle (brute) est donc de :

$$2.82 \,.\, 10^6 \times 20 \text{ EU} - 31.33 \,.\, 10^6 \times 1 \text{ EU} = 25.07 \,.\, 10^6 \text{ EU}$$

Obtient-on des résultats comparables avec la théorie de la valeur que l'on a évoquée ci-dessus, d'une part ; et avec la théorie du risque que l'on a exposée en première partie, d'autre part ?

Une application singulière de la théorie de la valeur : nécessité d'une correction 43

La réponse de Trigeorgis et Mason, Allaz, etc... à cette dernière question consiste à affirmer que, si l'on utilise la théorie de la valeur en univers risqué, le taux d'actualisation à utiliser doit être égal au taux espéré de rendement du 'titre jumeau' (parfois appelé 'taux requis par le marché') afin que le calcul d'actualisation reflète la situation de risque, considérée comme 'équivalente' pour le titre-jumeau et le projet. Calculons le taux qui découle de ce point de vue, en égalisant prix actuel du titre et rendement espéré :

$20 \text{ EU} = (0.5\,(36 + 0.5 \times 12) \text{ EU} \times (1+r)^{-1} = 24 \times (1+ r)^{-1}$

d'où l'on tire r = (24 - 20) / 20 = 0.2, soit 20%.

Appliquer ce taux au tableau de décision ci-dessus fournit alors des cash-flow actualisés respectivement de $-4 \,.\, 10^6$ EU, de 0, et de $28.2 \,.\, 10^6$ EU pour les trois solutions possibles : Investir dès aujourd'hui, renoncer dès aujourd'hui, attendre. La meilleure décision apparaît donc être d'attendre, la valeur du projet étant de $28.22 \,.\, 10^6$ EU.

Ce chiffre diffère de la valeur espérée de $25.07\ 10^6$ EU auquel on était parvenu ci-dessus en appliquant la théorie de l'arbitrage et des actifs contingents. D'où la conclusion des auteurs cités, selon qui il faudrait réviser la théorie de la décision et du risque, celle-ci ne pouvant pas tenir compte de la « flexibilité » de certains projets d'investissement ou, à défaut d'une telle révision, n'utiliser que les techniques d'évaluation par recherche d'exclusion d'arbitrage et rejeter la théorie du risque établie.

Montrons cependant que cette conclusion est erronée et qu'elle ne résulte que d'une application inadéquate de la théorie de la valeur dans un tableau de décision. Remarquons tout d'abord que le 'taux exigé par le marché' est une construction artificielle plus que fragile : le titre-jumeau a ici été pris en corrélation parfaite avec la stratégie « investir dès aujourd'hui ». Il a un certain sens pour cette stratégie-là. Il n'en a aucun pour la stratégie d'attente(ou pour d'autres stratégies envisageables). Si l'on avait procédé en sens inverse, on aurait rencontré la même contradiction.

En réalité, l'application correcte de la théorie de la valeur implique de ne pas utiliser de taux d'actualisation chargé pour le risque, comme l'avaient déjà signalé Robichek et Myers dans les années Soixante, ainsi que M. Boiteux avec l'apologue épistémologique de la tenaille et du marteau [Boiteux, 1969]. Le taux d'actualisation est une modélisation du facteur temps, non du facteur risque. Si l'on souhaite donc écarter toute considération d'utilité personnelle et en rester aux valeurs des actifs, il faut utiliser comme taux d'actualisation le taux d'intérêt de l'actif sans risque et comme probabilités les probabilités risque-neutres définissables à partir du prix de marché. Dans l'exemple considéré ici, ces probabilités risque-neutres se définissent en égalant le prix actuel du titre-jumeau et son rendement espéré actualisé au taux de l'actif sans risque : on trouve alors une probabilité risque-neutre de l'évolution favorable de la demande égale à 0.4, une masse de probabilité égale à 0.6 étant réservé à l'évènement complémentaire.

On retrouve alors les valeurs de -4. 10^6 EU et de 25.07 . 10^6 EU pour les stratégies « investir tout de suite » et pour la stratégie d'attente respectivement, ce qui est parfaitement cohérent avec les résultats obtenus par recherche de la situation d'arbitrage exclu.

L'application de la théorie du risque en présence de marchés d'actifs contingents

Quant à l'application correcte de la théorie du risque, elle implique que l'on considère la fonction d'utilité du décideur et les probabilités subjectives que celui-ci tient pour fondées. La valeur d'un projet en univers risqué est en effet du point de vue où l'on se place maintenant, le prix de vente *(breakeven selling price)* ou le prix d'achat *(breakeven buying price)* de la loterie qui le modélise. Il faut, bien sûr, définir ces deux notions dans le cas intertemporel - le cas où les performances du décideur (firme, investisseur individuel, etc...) se repèrent sur un ensemble de périodes, non sur une seule -, ce que nous n'avons pas fait plus haut. Mais les définitions données dans le cadre statique se généralisent sans aucune difficulté au cas intertemporel :

Le prix de vente (minimum) d'une loterie est la somme versée en période actuelle susceptible de restaurer l'utilité *intertemporelle* du décideur si celui-ci se sépare de la loterie considérée.

Le prix d'achat (maximum) d'une loterie est la somme versée en période actuelle susceptible de compenser l'accroissement d'utilité *intertemporelle* dû à la possession de la loterie.

Formellement, on peut donner une version précise de ces deux définitions en considérant une utilité intertemporelle du décideur, soit u (x_0, x_1), où les variables x_t représentent les résultats financiers obtenus, l'indice t étant celui de la période où le résultat survient (t=0 : période actuelle, t=1 : demain).

Si tous les actifs considérés sont échangeables sur des marchés d'actifs contingents, nous pouvons supposer qu'il en va bien ainsi pour le projet à évaluer et que tout se passe comme si le décideur était en présence du projet décrit ci-dessus -soit k(t) le cash-flow qu'il génère à l'année t - et de deux titres, le titre-jumeau et le titre sans risque définis ci-dessus. Le décideur doit alors optimiser son portefeuille, dans l'hypothèse où il accepte le projet comme dans celle où il y renonce. Si l'on note x_0, x_1 les investissements optimaux en actifs en présence du projet, y_0, y_1 les investissements optimaux en actifs en l'absence du projet, les cash-flows obtenus seraient fonctions des variables aléatoires c(t) (le prix des titres à la période t) et k(t) et pourraient être calculés pour chaque évènement de l'année considérée :

— si le projet est accepté : $k(0) + [-x_0].c(0)$ à la période 0, puis, à la période 1 : $k(1) + (x_0 - x_1).c(1)$;

— si le décideur renonce au projet : $(-y_0).c(0)$ à la période 0, puis, à la période 1 : $(y_0 - y_1).c(1)$.

Le prix de vente généralisé Pv du projet est alors défini par :

$E[u[(-y_0).c(0),(y_0 - y_1).c(1) + Pv]] = E[u[k(0) + (-x_0).c(0),\ k(1) + (x_0 - x_1).c(1)]]$

et le prix d'achat généralisé Pa par :

$E[u[k(0) + (-x_0).c(0),\ k(1) + (x_0 - x1).c(1) - Pa]] = E[u[(-y_0).c(0), : (y_0 - y_1).c(1)]$

équations qui sont les répliques de celles que nous avions écrites en fin de première partie, sous réserve du fait que la fonction d'utilité est ici *intertemporelle*, ce qui signifie que le décideur sait comparer par lui-même des sommes intervenant à des époques différentes[4]. Le prix du risque est toujours défini, pour un projet à acquérir, par $\pi^* = E(x^0) - Pa$,

4. La fonction d'utilité intertemporelle permet de définir des facteurs d'escompte psychologiques du décideur. Il se trouve qu'à l'équilibre de marché, les facteurs d'escompte des divers agents économiques (ménages, firmes) sont tous nécessairement égaux, ce qui donne chair à la théorie de l'actualisation. Ce que l'on fait ici consiste à combiner la théorie de l'actualisation (chapitre de la théorie de la valeur) et la théorie du risque (chapitre de la théorie de la décision), en vue de permettre la comparaison avec la technique d'évaluation d'un projet risqué comme portefeuille d'actifs contingents sur un marché en partie simulé. Nous suivons la démarche de Smith et Nau [1994], déjà cités.

et, pour un projet à vendre, par $\pi = E(x^0) - Pv$, où $E(x^0)$ est la valeur actuarielle du projet.

Si l'on suppose $u(x_0, x_1) = -\exp(-x_0/200) - \exp(-x_1/220)$, on trouve, en maximisant l'espérance d'utilité, un prix d'achat généralisé de $-4 \,.\, 10^6$ EU pour la stratégie Investir dès à présent et de $25.07 \,.\, 10^6$ EU pour la stratégie d'attente, ce qui est parfaitement cohérent avec les résultats obtenus par recherche de la situation d'arbitrage exclu. Faut-il ajouter que l'on a implicitement fait l'hypothèse que les marchés d'actifs financiers étaient complets ? Dans l'hypothèse inverse, se fier exclusivement à une recherche d'arbitrage exclu serait vain et dangereux. Mais ces aspects techniques n'ont guère leur place ici.

Il n'y a en tout cas pas lieu, au vu de la théorie financière des prix d'actifs contingents, de réviser la théorie du risque en raison de la « flexibilité » de certains investissements. Tout au plus convient-il d'appliquer de façon scrupuleuse les règles de la théorie économique, si l'on accepte les fondements de celle-ci. Les généralisation de la notion de risque et de prix du risque comme la recherche expérimentale en économie permettent une réévaluation que l'on tentera de synthétiser ici.

Coût d'opportunité et coût prudentiel d'une situation risquée

Les analyses présentées ci-dessus n'ont pas remis en cause la rationalité Neumannienne de l'utilité espérée. Pourtant, de nombreuses études permettent de penser que celle-ci est trop restrictive pour décrire de façon conforme à l'observation le comportement d'une majorité d'agents économiques. Les études expérimentales ont été les premières et surtout les plus nombreuses à soulever des doutes [Allais, 1953, Slovic et Lichtenstein, 1971, Slovic et Tversky, 1974, Kahneman et Tversky, 1979, Grether et Plott, 1979, Munier et Abdellaoui, 1991, Abdellaoui et Munier, 1994, 1996]. Quelques études empiriques - fondées sur des données de comportement d'achat - ont contribué aussi à un questionnement de la théorie établie [Friedman et Savage, 1948]. On trouvera quelques synthèses des résultats de la littérature dans Schoemaker [1982], Machina [1987], Munier [1989a, 1989b, 1995]. Diverses tentatives de modélisation alternative de la décision rationnelle ont vu le jour, qu'en retour les expérimentateurs ont essayé de tester de façon comparative dans les années récentes [Camerer, 1989, Harless et Camerer, 1994, Hey and Orme, 1994]. Quelle modélisation semble émerger, avec quelles implications ? Les développements récents sur le prix du risque rejoignent-ils ces conceptions nouvelles de modélisation de la rationalité ? Nous commencerons par le second point, qui conduira naturellement à répondre à la première interrogation soulevée.

Les extensions de la notion de risque et de prix du risque

Dans deux articles désormais « classiques », Rothschild et Stiglitz [1970,1971] sont parvenus à généraliser la notion de risque et à donner des définitions équivalentes de la relation « plus risqué(e) que » qui permet de comparer deux contrats risqués, deux investissements en avenir risqué, deux titres financiers ou, plus généralement, deux loteries. Dans une perspective en apparence différente, Kimball [1990, 1993] a défini une nouvelle façon de réfléchir au coût subjectif du risque ou prix du risque. Ces deux efforts semblent converger vers une qualification de la dispersion des résultats d'une loterie et, finalement, vers une appréhension plus large de la notion de rationalité.

Qu'est-ce qu'un risque accru ?

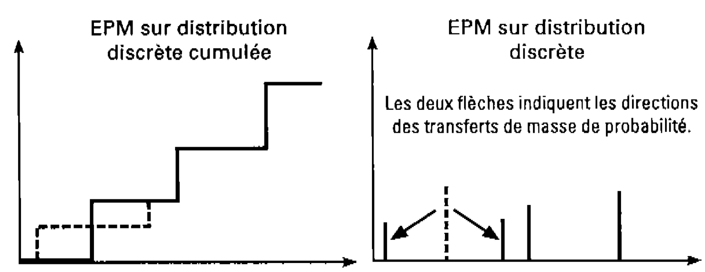
Rothschild & Stiglitz [1970, 1971] sont parvenus à établir un ordre partiel des situations de risque décrites par des variables aléatoires x, y, z.... qui est équivalent à celui de Pratt mais défini de façon plus générale

Dans cette perspective, Rothschild et Stiglitz montrent que quatre définitions d'une situation y «plus risquée que» telle situation de référence x sont possibles :

(1) La distribution de y se déduit de celle de x par déplacement de masses de probabilité du centre de la distribution vers les extrémités, l'espérance de la distribution restant inchangée du fait du dit déplacement : on dit que y se déduit de x par un «écartement préservant la moyenne» *(mean preserving spread)*. La figure 5 schématise le concept sur une distribution de probabilité cumulée (ou fonction de répartition) et sur la distribution non cumulée correspondante.

Figure 5

Ecartement préservant la moyenne (EPM) au sens de Rothschild-Stiglitz



Le risque, c'est donc l'accroissement des masses de probabilités vers les extrêmités : on retrouve l'idée de dispersion, mais sous une forme très générale.

(2) $\exists$ z t.q. : $y = x + z$, avec $\forall x$, $E[z \mid x] = 0$, c'est-à-dire que y se déduit de x par l'addition d'un «bruit blanc» : il s'agit d'une version différente de la même idée.

(3) Soient x et y $\in$ [a,b]. Si F(.) est la fonction de répartition de x et G(.) celle de y, on vérifie la condition intégrale :

$T(x) = \int_a^x [G(z) - F(z)]\, dz \geq 0$

avec $T(b) = 0$ et, en notant $H(.) = G(.) - F(.)$, $H(a) = H(\infty) = 0$.

On peut se représenter, à partir de la figure 5, que cette condition exprime sous une forme différente encore la même idée.

(4) Pour toute fonction u concave, $E[u(x)] > E[u(y)]$. Il s'agit ici de la version Neumannienne de l'aversion au risque que nous avons exposée en première section de cet article.

Rothschild et Stiglitz démontrent dans l'article cité que les préordres partiels correspondant à chacune de ces quatre conditions coïncident, ce qui généralise l'analyse de von Neumann-Morgenstern et surtout d'Arrow-Pratt, en la mettant en relation avec des transformations morphologiques possibles des situations de risque décrites par les diverses distributions, que nous appellerons pour cette raison « structures de risque ». En revanche, ces préordres ne coïncident pas nécessairement avec le préordre (complet) engendré par la variance des lois de probabilité concernées, ce qui soulève une nouvelle fois la question de la validité de l'analyse espérance-variance[5].

Le prix du risque comme prix des mesures prudentielles à prendre

La contribution de Rothschild et Stiglitz reste dans la droite ligne de la notion de dispersion utilisée par leurs prédécesseurs, en un sens assez large, comme on vient de le voir, mais suffisamment précis pour ne pas admettre l'analyse espérance-variance comme équivalent possible. Le prix du risque représente toujours l'intérêt qu'il peut y avoir à se « débarrasser » du risque entendu au sens que l'on vient de dire.

On peut cependant faire deux objections à cette façon de voir : d'une part, ce qui est plus ennuyeux pour le décideur que la simple dispersion symétrique des résultats, c'est l'asymétrie vers le bas de ces résultats ! Or, si l'analyse de Rothschild et Stiglitz laisse entrevoir une possibilité de distinguer entre des EPM différents, ces auteurs n'ont eux-mêmes rien proposé de précis sur ce point. Par ailleurs, « se débarrasser » d'une

5. Dès 1969, Karl Borch avait attiré l'attention sur la possiblité de violer la dominance stochastique du premier ordre lorsque l'on utilise l'analyse espérance-variance [Borch, 1969]. Il est vrai que l'analyse espérance-variance est souvent une approximation acceptable [Levy et Markowitz, 1979] de l'utilité espérée. Mais il est tout de même surprenant que la littérature ne soit pas plus prudente à cet égard.

loterie risquée est souvent une vue de l'esprit. C'est plus souvent possible sur les marchés financiers que dans d'autres domaines, mais cela ne l'est pas toujours malgré tout. Dans ce cas, la « gêne » causée par le risque est plutôt représentée par le coût des mesures prudentielles nécessaires que par le coût d'avoir à supporter le risque.

M.S. Kimball [1990, 1993] a tenté d'exploiter cette idée en soulevant la question de savoir combien il faudrait donner à l'individu pour qu'il *choisisse les mêmes actions en environnement certain qu'en environnement risqué.* Le concept de « prudence » ou de « précaution » va ainsi tenter d'évaluer à quel point on cherche à se prémunir face au risque et on s'y prépare en modifiant les choix que l'on a à effectuer, et combien cela « coûte » au décideur. Le prix du risque, c'est celui des mesures prudentielles qu'il nécessite. Ces mesures prudentielles se reflètent dans la façon de « mener la vie courante » lorsque l'on assume le projet, c'est-à-dire dans ce que les économistes appellent les « décisions intermédiaires », notées ici par $\propto$.

Kimball propose de définir une variation compensatrice de prudence ψ comme suit :
$\delta/\delta\propto E[u[C_0 + Z(\alpha, \theta) + \psi]] = \delta/\delta\propto\ u[C_0 + Z(\propto, E(\theta)] = 0$, avec $\propto^*(\psi)$ solution du membre gauche et $\propto^{**}$ solution du membre droit, telles que $\propto^*(\psi) = \propto^{**}$.

On peut encore définir une variation équivalente de précaution ψ^* telle que :

$\delta/\delta\propto\ E[u[C_0 +] Z(\propto, \theta)] = \delta/\delta\propto\ u[C_0 + Z(\propto, E(\theta)) - \psi^*] = 0$, avec $\propto^0$ solution du membre gauche et $\propto^0(\psi^0)$ solution du membre droit, telles que $\propto^0 = \propto^0(\psi^0)$.

Autrement dit, le coût d'une situation risquée, du point de vue d'un décideur prudent, c'est la somme ψ^* qui lui permettrait de « vivre comme d'habitude » (sans restrictions prudentielles) alors même qu'il est engagé dans un contrat risqué. Cette notion correspond sans doute mieux à ce que l'on veut dire lorsque l'on parle de « provisionnement pour risque » d'une créance engagée par une banque, par exemple, que le traditionnel « prix du risque » au sens de la première partie ci-dessus.

Il est aisé - par un développement limité semblable à celui de Pratt [1964], mais appliqué à la première dérivée u' plutôt qu'à la fonction u elle-même - de voir que ce concept est en effet clairement différent de l'aversion au risque. On obtient en effet

$$\psi^* = -1/2\,\sigma^2 u'''/u'$$

et l'on voit que le prix du risque au sens de la prudence (ou précaution) dépend de la dérivée troisième de u, quand le prix de l'aversion au risque (au sens de Pratt) dépend de la dérivée seconde. On peut donc être prudent et avoir une aversion au risque nulle, voire une inclination au risque, et inversement.

Le prix du risque comme prix d'une dispersion asymétrique des résultats

Il est particulièrement remarquable, dans ces conditions, que la deuxième objection présentée en III.1. (la dispersion des résultats vers le bas nous importe plus que vers le haut) trouve une réponse qui se confond avec celle que l'on a apportée à l'objection précédente, du moins dans un cas particulier. On doit en effet à Eeckhoudt, Gollier et Schneider [1993] d'avoir montré que la « prudence » au sens où on vient de la définir implique une préférence de la part d'un décideur pour un EPM situé « en haut » des résultats par rapport à des EPM situés « en bas », toutes choses égales d'ailleurs. Plutôt qu'une discussion abstraite, un exemple montrera ce qui est en jeu.

Considérons les trois placements risqués A, C et C' suivants :

A : (-30, .20 ; 10, .60 ; 30, .20)

C : (-30, .20 ; 10, .60 ; 20, .10 ; 40, .20)

C': (-40, .10 ; -20, .10 ; 10, .60 ; 30, .20)

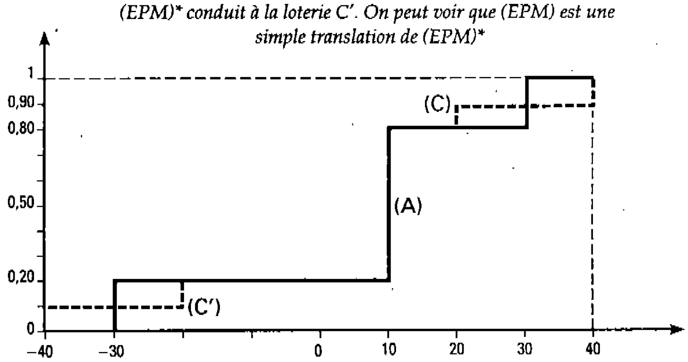
C résulte de A par EPM séparant la masse de probabilité (.20) auparavant concentrée sur le résultat 30 en deux masses égales de probabilité (de .10 chacune) concentrées sur les résultats 20 et 40. Evidemment, l'espérance de gain est la même pour les deux contrats, mais C est « plus risqué que » A au sens de Rothschild et Stiglitz. Par ailleurs, C' résulte de A par l'intermédiaire du « même » EPM (séparant une masse de probabilité de .20 en deux fois .10 affectés de façon symétrique par rapport à leur support antérieur).

Le lecteur aura intérêt à arrêter ici sa lecture un instant et à considérer comment il comparerait du point de vue de leurs caractères risqués respectifs comme du point de vue du « prix du risque » qu'il ressent dans chaque cas, les trois loteries ci-dessus.

Figure 6

Transformation de la fonction cumulative de probabilité (A) de la loterie A:

la transformation (EPM) conduit à la loterie C ; la transformation (EPM) conduit à la loterie C′. On peut voir que (EPM) est une simple translation de (EPM)**



La seule différence entre la transformation de A en C et celle de A en C′ est que le support de probabilité auquel l'EPM s'applique dans le contrat A n'est pas le même dans les deux cas, C et C′ : au lieu de s'appliquer au niveau +30 (« en haut » des résultats de A) pour le contrat C, l'EPM est appliqué au niveau -30 (« en bas » des résultats de A) pour le contrat C′. La figure 6 indique comment la distribution cumulée de A est transformée en distribution cumulée caractérisant C ou en distribution cumulée caractérisant C′.

Dans le cas général, les décideurs préfèrent la loterie C à la loterie C′, parce que, dans la transformation qui fait passer de A à C, « l'accroissement de dispersion concerne de bons résultats et, même si c'est regrettable, ce n'est pas inquiétant » pour la réussite du contrat. Inversement, C′ inquiète, parce que, par rapport à A, « il s'agit d'un risque accru sur de mauvais résultats, et l'on n'avait vraiment pas besoin d'avoir cette crainte supplémentaire ». Naturellement, on voit bien que la psychologie du personnage hypothétique interviewé ici est d'être « prudent ». Quelqu'un qui le serait moins pourrait faire un raisonnement inverse et préférer C′ au motif que « les mauvais résultats ne l'intéressant pas, il aime encore mieux qu'un risque accru s'applique à eux plutôt qu'aux bons, qui seuls l'intéressent ».

Eeckhoudt, Gollier et Schneider [1993] ont prouvé qu'un coefficient de prudence ψ^* *positif* implique préférence de C sur C′. Ils ont ainsi montré que le concept de Kimball, conçu à l'origine pour traiter de questions de bien-être en situation de risque, a une traduction à la fois simple et intuitivement importante en statique comparative du risque.

On remarquera au passage que l'aversion au risque - au sens de Pratt comme au sens de Rothschild et Stiglitz - ne nous est d'aucun secours ici pour choisir entre C et C'. Le « prix du risque » au sens traditionnel est le *même* pour la loterie C et la loterie C' (qui ont même espérance et même variance d'ailleurs). Ce qui compte dans la comparaison de deux EPM identiques à une translation près de leur point d'application (figure 6), c'est le coefficient de prudence, ou de précaution.

Malheureusement, tous les EPM appliqués à des points d'impact différents d'une même loterie de départ ne sont pas identiques à une translation près. Par exemple, le contrat B suivant est aussi dérivé de A par un EPM. Soit B : (-30, .20 ; 0, .30 ; 20, .30 ; 30, .20). Le lecteur pourra se convaincre lui-même que B dérive bien de A par EPM, mais que l'EPM en cause ici n'est en rien similaire à ceux qui ont transformé ci-dessus A en C et A en C' respectivement. Le théorème d'Eeckhoudt-Gollier-Schneider ne s'applique pas, et la comparaison entre B d'une part, et C ou C' d'autre part, n'est pas possible sans davantage d'information.

Il serait très utile de pouvoir dégager d'autres relations qualitatives permettant de comparer directement certaines loteries telles que A, B, C, C', comme on l'a fait ci-dessus pour C et C' à travers le théorème Eeckhoudt-Gollier-Schneider. Ces relations pourraient être appuyées sur des « caractéristiques de structure » de la situation de risque en même temps que sur certaines caractéristiques des préférence du décideur. Nos collègues Chateauneuf et Cohen travaillent sur ces questions en ce moment. Mais on peut montrer, sur quelques exemples, que l'on a besoin pour ce faire et au-delà d'un certain seuil, d'une notion de rationalité plus générale que celle de l'utilité espérée, à laquelle on a exclusivement eu recours jusqu'ici.

Le prix du risque dans un cadre élargi de rationalité

Parmi les modèles qui ont été proposés pour tenter de modéliser les préférences constatées au cours des très nombreux tests expérimentaux effectués depuis une vingtaine d'années, le modèle dû initialement à Quiggin [1982] (sur une idée d'Allais dans les années Cinquante) et trouvé indépendamment un peu plus tard par Allais lui-même [1988] et, sous une forme spécifique, par Yaari [1987], est peut-être le plus attrayant par sa -relative - simplicité, sa généralité, sa signification intuitive. Quelle sont ses implications pour la notion de risque, pour le prix du risque, pour le traitement au niveau collectif ou du marché, du risque ? On se bornera ici à quelques indications essentielles, renvoyant pour de plus amples détails à d'autres publications [Quiggin, 1993, Munier, 1995].

Rappelons d'abord qu'il s'agit de prendre en considération l'ensemble de la « structure de risque » qui caractérise la situation à laquelle le décideur se trouve confronté. Mais on le fait en simplifiant cette structure à l'aide d'un « truc » : on classe (par ordre croissant en général) les résultats possibles du contrat auquel on s'intéresse. Admettons que (x_1, x_2, x_3, ... x_n) soient ainsi les résultats possibles classés par ordre croissant. On raisonne donc sur la distribution décumulative de probabilité et l'on remplace l'axiome d'indépendance. On obtient finalement évaluation d'une loterie $L = (x_1, p_1 ; x_2, p_2 ; \quad ... \quad ... x_n , p_n)$ par une fonctionnelle V telle que :

$$
\begin{aligned}
V = {} & u(x_1) \\
& + [u(x_2) - u(x_1)].\theta\,(p_2 + p_3 + ... \quad ... + p_n) \\
& + [u(x_3) - u(x_2)] \quad . \quad \theta\,(p_3 + p_4 + ... \quad ... + p_n) \\
& .... \\
& + [u(x_n) - u(x_{n-1})] \quad . \quad \theta\,(p_n)
\end{aligned}
$$

avec $\theta(.)$ non linéaire, monotone croissante, soit $\theta'>0$ pour toute valeur de $\mathbf{p}$, $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$ (on note ici **p**, en gras, pour rendre clair qu'il s'agit de valeurs de la distribution décumulative de probabilité).

Autrement dit, dans cette nouvelle perspective, un décideur « raisonne » son évaluation de la loterie en ajoutant les espérances (dans un sens plus général, que l'on peut appeler des « attentes ») suivantes : $u(x_1)$ - dont il est sûr, donc qu'il pondère par 1 - , l'incrément $[u(x_2) - u(x_1)]$, qu'il pondère par une transformation $\theta(.)$ de sa probabilité ($p_2 + p_3 + ... \quad ... + p_n$), etc... jusqu'à l'incrément $[u(x_n) - u(x_{n-1})]$, qu'il pondère par la même transformation $\theta(.)$ de sa probabilité p_n. On notera immédiatement que cette expression est égale à l'utilitée espérée dans divers cas particuliers : celui où θ est la fonction identité, c'est-à-dire où, $\mathbf{p}$, $\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, est évident ; ceux pour lesquels $\theta(.)$ est linéaire (de la forme a.**p**) ou affine (de la forme a.**p** + c) en sont d'autres.

Dans une telle conception de la rationalité, l'attitude par rapport au risque dépend à la fois de la forme de la fonction d'utilité u (celle-ci pouvant elle-même dépendre de la richesse de l'individu s'il s'agit d'une fonction d'utilité Neumannienne) *et de la fonction θ, dite fonction de transformation des probabilités.*

Notons que l'on peut écrire cette fonctionnelle de rationalité sous la forme apparemment simplifiée :

$\Sigma^n_{i=1} p_i^* u(x_i)$

en posant par définition $p_i^* = q(p_i + p_{i+1} + ... \quad ... + p_n) - \theta(p_{i+1} + p_{i+2} + ... \quad ... + p_n)$.

Le prix du risque global Π peut être alors défini par :

$u(E(x)-\Pi) = E^*(u(x))$

avec $\qquad E^*(u(x))=\Sigma^n_{i=1} p_i^* u(x_i)$.

Le décideur est indifférent entre le montant certain E(x)-Π - prix de vente minimum de la loterie à ses yeux - et la loterie x elle-même. Le concept d'Arrow-Pratt se trouve donc étendu. Le prix du risque Π dépend à la fois de l'évaluation des résultats possibles par le décideur (fonction d'utilité), et de la fonction de transformation de probabilité, c'est-à-dire de $\theta(.)$. Cette dernière composante de l'attitude par rapport au risque s'appelle *l'attitude probabilistique par rapport au risque* . Elle traduit le fait qu'à variance et espérance données (paramètres qui ne définissent de façon complète une distribution de probabilité que dans le cas particulier d'une distribution Normale, distribution au demeurant rare sur les marchés monétaires et financiers), un décideur est aussi sensible à la répartition des masses de probabilité dans la distribution *en séparant de façon indépendante son appréhension de ce phénomène et son évaluation marginale du revenu.* C'est ce dernier point qui est décisif pour distinguer cette rationalité de la rationalité Neumannienne. D'où l'idée d'appeler ce modèle d' «utilité attendue » du vocable de « modèle dichotomique ».

Au voisinage d'une valeur p de la probabilité, trois caractéristiques de $\theta(.)$ déterminent l'attitude probabilistique vis-à-vis du risque, comme on peut le voir en supposant une légère variation de la distribution de probabilité de x. On peut alors exprimer :

$V(x,\ p+\Delta p) = (p+\Delta p)u(x)+[\theta(p)-p)+(\Delta(\theta'(p)-1)+(1/2)\Delta p^2\ \theta''(p)+\Delta p^2\xi(p, \Delta p)]u(x)$

La différence F(p) - p caractérise l' « optimisme absolu » (F(p) - p > 0 dans le cas de gains) ou le « pessimisme absolu » (F(p) - p < 0 dans le cas de gains) du décideur.

L'optimisme ou le pessimisme, lorsque les probabilités p varient, se trouve ajusté par la quantité F'(p)-1; une pente supérieure à l'unité caractérise un optimisme du premier ordre (dans le cas de gains) , une pent inférieure à l'unité un pessimisme du premier ordre.

Enfin, la concavité ou la convexité de θ au voisinage de p caractérise un pessimisme ou un optimisme du second ordre.

Des modifications similaires peuvent être introduite dans la conception du prix du risque comme coût de mesures prudentielles exposée ci-dessus.

Au niveau collectif, les prix de marché d'équilibre ne sont plus définis de façon unique, de même que les probabilités 'risque-neutres'[6]. De façon similaire, le théorème d'Arrow-Lind ne s'applique plus. La théorie de la valeur reçue jusqu'ici apparaît donc comme une convention, non comme un fait qui s'imposerait à tous. Là réside la véritable révision à apporter aux théories de la valeur, du risque et de la décision.

6. *Chateauneuf, Kast et Lafied, 1994. Kast et Lafied, 1995.*

Le prix du risque est un concept dont la théorie, largement développée, a évolué ces dernières années, tant en fonction de considérations pratiques qu'en raison de généralisations théoriques. Parmi les considérations pratiques à l'origine des modifications du concept, il convient de retenir l'importance croissante des pratiques prudentielles ainsi que la difficulté croissante de faire porter la totalité des risques par d'autres, tant sur les marchés financiers et monétaires que sur les marchés d'assurance ou de réassurance, comme aussi sur le marché du travail et bien d'autres.

Il faut certes rester vigilants vis-à-vis des inventeurs de concours Lépine qui, périodiquement, découvrent des contradictions de la théorie économique qui n'existent que dans leur esprit. Mais il faut retenir, parmi les considérations théoriques, la sophistication accrue des observations expérimentales et leur impact croissant sur les développements théoriques de l'économie comme de la gestion. On a été ainsi conduit à généraliser certains des concepts de la théorie du risque, parmi lesquels celui de prix du risque. Celui-ci n'est plus seulement le coût d'opportunité direct que le raisonnement marginaliste laisse entrevoir habituellement, mais un coût d'opportunité plus subtil, indirect, celui des mesures prudentielles à prendre dans une situation risquée. Ce glissement de l'attention, comme la généralisation du concept de rationalité économique, augurent favorablement du rapprochement entre les analyses académiques et les comportements observables en pratique sur les marchés.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abdellaoui, M. et B. Munier, 1994, « On the Fundamental Risk-Structure Dependence Effect of Individual Preferences under Risk », NR GRID 94-07.

Abdellaoui, M. et B. Munier, 1996, « The Risk-Structure Dependence Effect : Experimenting with an Eye to Decision-Aiding », NR GRID 96-02.

Allais, M., 1953, « Le Comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine », Econometrica, 21, pp. 503-546.

Allais, M., 1979, « The so-called Allais Paradox and Rational Decisions Under Uncertainty », in : M. Allais et O. Hagen, eds, Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox, Boston/Dordrecht/London, Reidel Publishing Company.

Allais, M., 1988, « The General Theory of Random Choices in Relation to the Invariant Cardinal Utility Function and the Specific Probability Function, the (U, θ) Model : A General Overview » in : B. Munier, ed., Risk, Decision and Rationality, Boston/Dordrecht/London, Kluwer Academic Publishers, pp. 173-221.

Allaz, B., 1990, « L'Apport de la théorie des options à l'évaluation des projets d'investissement », La Revue du Financier, n° 74, Mars-Avril, pp. 28-32.

Anscombe, F. et R. Aumann, 1963, « A Definition of Subjective Probability », Annals of Mathematical Statistics, 49, 453-467.

Arrow, K.J. et R. Lind, 1970, « Uncertainty and the Evaluation of Public Investment Decisions », American Economic Review, 60, pp. 364-378.

Bernoulli, 1738, « Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis », in : Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, Saint-Petersbourg, 5, pp. 175-192. Trad. française, 1985, « Esquisse d'une théorie nouvelle de mesure du sort », Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 6, pp. 61-77, par R. Charreton, Notes de B. Bru.

Boiteux, M., 1969, « Note sur l'Actualisation », Revue d'Economie Politique, 79.

Borch, K., 1969, « A Note on Uncertainty and Indifference Curves », Review of Economic Studies, 36, pp. 1-4.

Camerer, 1989, « An Experimental Test of Several Generalized Utility Theories », Journal of Risk and Uncertainty, 2, 61-104.

Chateauneuf, A., R. Kast et A. Lafied, 1994, « Market Preferences Revealed by Prices : Non-Linear Pricing in Slack Markets », in : B. Munier et M.-J. Machina, eds, Models and Experiments in Risk and Rationality, Dordrecht / Boston / London, Kluwer Academie Publishers, pp. 289-306.

Copeland, T.E., T. Koller et J. Murrin, Valuation Measuring and Managing the Value of Companies, New York, John Wiley and Sons.

Debreu, G., 1959, Theory of Value, New York, Wiley, Cowles Commission Monographs. Trad.française: Théorie de la Valeur : Analyse axiomatique de l'équilibre économique, Paris, Dunod, 1966.

Eeckhoudt, L., Ch. Gollier et Th. Schneider, 1993, « Risk Aversion, Prudence and Temperance : A (more) Unified Approach », mimeo. A paraître dansTheory and Decision.

Fisher, I., 1907, The Theory of Interest Rate, London. Trad. française, La Théorie de l'intérêt, Paris, Giard, 1926.

Friedman, M. et L.J. Savage, 1948, « The Utility Analysis of Choices Involving Risk », Journal of Political Economy, 56, pp. 279-304.

Grether, D. et C. Plott, 1979, « Economic Theory of Choice and the Preference Reversal Phenomenon », American Economic Review, 69, pp. 623-638.

Harless, et Camerer, 1994, « The Predictive Utility of Generalized Expected Utility Theories», Econometrica, 62, pp. 1251-1289.

Hey, J.D. et C. Orme, 1994, « Investigating Generalizations of Expected Utility using Experimental Data », Econometrica, 62, pp. 1291-1326.

Kahneman, D. et A. Tversky, 1979, « Prospect Theory : An Analysis of Decision under Risk », Econometrica, 47, pp. 263-291.

Kast, R. et A. Lafied, 1995, « Probabilité individuelle et probabilité de marché », Revue d'Economie politique, vol. 105, n° spécial sur «la Rationalité face au risque», sous la direction de B. Munier et J.-M. Rousseau, pp. 71-90.

Kimball, M. S., 1990, « Precautionary Saving in the Small and in the Large », Econometrica, 58, pp. 53-73.

Kimball, M. S., 1993, « Precautionary Motives for Holding Assets », The New Palgrave Dictionary of Money and Finance.

Levy, H. and H.M. Markowitz, 1979, « Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance », American Economic Review, 69, pp. 308-317.

Machina, M.J., 1987, « Choice under Uncertainty : Problems Solved and Unsolved », Journal of Economic Perspectives, 1, pp. 121-154.

March, J.G. et Z. Shapira, 1987, « Risk in a Managers' Perspective », Management Science, vol. 33. Trad. française : Les Managers face au risque, in : Décisions et Organisations, 1991, Paris, les Editions d'Organisation.

Maréchal, J-P., 1991, Le Prix du risque, l'économie au défi de l'environnement, Paris, Presses du CNRS.

McClennen, 1990, Rationality and Dynamic Choice : Foundational Explorations, Cambridge, Cambridge University Press.

Munier, B., 1989a, « Calcul économique et révision de la théorie de la décision en avenir risqué », Revue d'Economie Politique, 99, pp. 276-306.

Munier, B., 1989b, « New Models of Decision under Uncertainty », European Journal of Operational Research, 38, pp. 307-317.

Munier, B. 1995, « Entre rationalités instrumentale et cognitive : contributions de la dernière décennie à la modélisation du risque », Revue d'Economie Politique, 105, pp.5-70.

Munier, B., 1996, « Hammond's Consequentialism : A Qualification », in : K.J.Arrow, E. Colombatto, M. Perlman et C. Schmidt, eds., Rational Foundations of Economic Behaviour, London, MacMillan. A paraître.

Munier, B. et M. Abdellaoui, 1991, « Expected Utility Violations : An Appropriate and Intercultural Experiment », in : A. Chikàn, edr., Progress in Decision, Utility and Risk Theory, Boston/Dordrecht/London, Kluwer Academic Publishers, pp. 175-182.

Nau, R.F. et K.F. McCardle, « Arbitrage, Rationality and Equilibrium », Theory and Decision, 31, pp. 199-240.

Pascal, 1724, Traité du Triangle Arithmétique, in : Oeuvres complètes, Paris, J. de Mesnard, 1964 (Edition du Tricentenaire).

Pratt, J., 1964, « Risk Aversion in the Small and in the Large », Econometrica, 32, pp. 122-136.

Quiggin, J., 1982, « A Theory of Anticipated Utility », Journal of Economic Behaior and Organization, 3, pp. 323-343.

Quiggin, J., 1993, Generalized Expected Utility Theory, The Rank-Dependent Model, Boston/Dordrecht/London, Kluwer Academic Publishers.

Robichek, A.A. et S.C. Myers, 1963, La Préparation des décisions financières dans l'entreprise, Paris, Dunod.

Rothschild, M. et J. Stiglitz, 1970, « Increasing Risk I.: A Definition », Journal of Economic Theory, 2, pp. 225-243.

Rothschild, M. et J. Stiglitz, 1971, « Increasing Risk II.: Its Economic Consequences », Journal of Economic Theory, 3, pp. 66-84.

Savage, L.J., 1954, Foundations of Statistics, New York, Wiley.

Schoemaker, P. J. H., 1982, « The Expected Utility Model : Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations », Journal of Economic Literature, 20, pp. 529-563.

Slovic, P. et S. Lichtenstein, 1971, « comparison of Bayesian and Regression Approaches to the Study of Information Processing in Judgment, Organizational Behavior and Human Performance », 6, pp. 649-744.

Slovic, P. et A. Tversky, « Who Accepts Savage's Axioms ? », Behavioral Science, 19, pp. 368-373.

Smith, J.E. et R.F. Nau, 1995, « Valuing Risky Projects : Option Pricing Theory and Decision Analysis », Management Science,41, N° 5, pp. 795-816.

Trigeorgis, L. et S.P. Mason, « Valuing Managerial Flexibility »,Midland Corporate Finance Journal, 5, pp. 14-21.

Yaari, M., 1987, « The Dual Theory of Choice under Risk », Econometrica, 55, pp. 95-116.

von Neumann, J. et O. Morgenstern, 1944, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, Princeton University Press. (3ème édition, 1953).