

EXTENSIONS DE LA THÉORIE DE BLACK ET SCHOLES À L'ÉVALUATION DE PRODUITS FINANCIERS

FLORENCE SOULÉ DE LAFONT, MOHAMED EL BARSIRI

CAISSE AUTONOME DE REFINANCEMENT

Les modèles habituels de pricing Black et Scholes (1973), Cox et Ross (1976) n'étant pas directement utilisables pour évaluer un certain nombre d'actifs conditionnels, des extensions de ces modèles ont vu le jour ces dernières années.

Dans cet article, nous nous proposons de détailler les spécificités de toute une gamme de produits dont l'évaluation nécessite de recourir à de telles extensions.

La liste des produits sur lesquels nous nous concentrerons n'a en aucun cas la prétention d'être exhaustive mais veille plutôt à juxtaposer des produits dits classiques et des produits plus exotiques.

Parmi les produits classiques, on a retenu les obligations convertibles et les obligations à coupon variable.

Comme produit intermédiaire, on s'est intéressé aux emprunts indexés sur la performance d'une action ou d'un indice.

Enfin, parmi les produits dits exotiques, trois classes de produits ont été isolées :

- les produits dont le rendement dépend du chemin parcouru par une action ou un indice,
- les produits dont le rendement est lié au maximum des performances de plusieurs indices,
- les produits combinant un risque de change et un risque action.

On verra que la théorie des actifs contingents est facilement applicable à l'évaluation de tous ces produits :

Les méthodes probabilistes qui conduisent à des formules explicites sont opérationnelles dès que les lois de probabilité suivies par les différents sous-jacents sont appréhendables ; lorsque ceci n'est pas le cas, on a recours à des méthodes de résolution numérique, une fois obtenue les équations aux dérivés partielles suivies par les produits étudiés.

Dans la première partie de cet article, nous détaillerons donc le cas des obligations convertibles, des obligations à taux variable et des emprunts

indexés sur la performance d'une action ou d'un indice. On montrera que l'évaluation de chacun de ces produits équivaut à valoriser une ou plusieurs options classiques.

Dans la seconde partie, nous traiterons des produits plus complexes dont le prix dépend de l'évolution de plusieurs sous-jacents : les produits « Path Dépendant », les produits « Best of » et les produits « Quanto ».

Ces actifs conditionnels interviennent en effet dans la conception de nombreux nouveaux produits financiers.

Produits financiers à option classique implicite

Dans l'ordre chronologique d'apparition sur le marché, on citera successivement, les obligations convertibles, les obligations à taux variable et enfin les emprunts indexés sur la performance d'un indice ou d'une action.

Les obligations convertibles

Ce produit financier hybride qui juxtapose un produit obligatoire et le droit d'acheter l'action sous-jacente au prix de l'obligation convertible, fait figure de produit traditionnel puisque son apparition a largement précédé celle des options sur action

Néanmoins, l'évaluation rigoureuse d'un tel produit se révèle être un exercice très délicat pour différentes raisons :

- le prix d'exercice du call sur l'action sous-jacente varie en fonction du prix de l'obligation convertible elle-même,
- la plupart des obligations convertibles sont assorties de clauses de remboursement anticipé au gré de l'émetteur ou du porteur qui varient dans le temps,
- la conversion est possible à tout instant.

Pour ces différentes raisons, l'utilisation de la formule de Black et Scholes s'avère peu satisfaisante et il paraît indispensable de recourir à des méthodes de résolution numérique suffisamment précises pour pouvoir prendre en compte la totalité des contraintes et l'éventualité de la conversion à chaque instant.

Une approche rigoureuse de l'évaluation d'un produit aussi simple que l'obligation convertible implique donc le développement de logiciels relativement lourds nécessitant une certaine expertise en terme de résolution d'équations aux dérivés partielles. Des tests numériques doivent être conduits de façon systématique pour utiliser les méthodes de calcul sous-jacentes de façon optimale, c'est-à-dire en réalisant le meilleur compromis temps de calcul/degré d'approximation retenu.

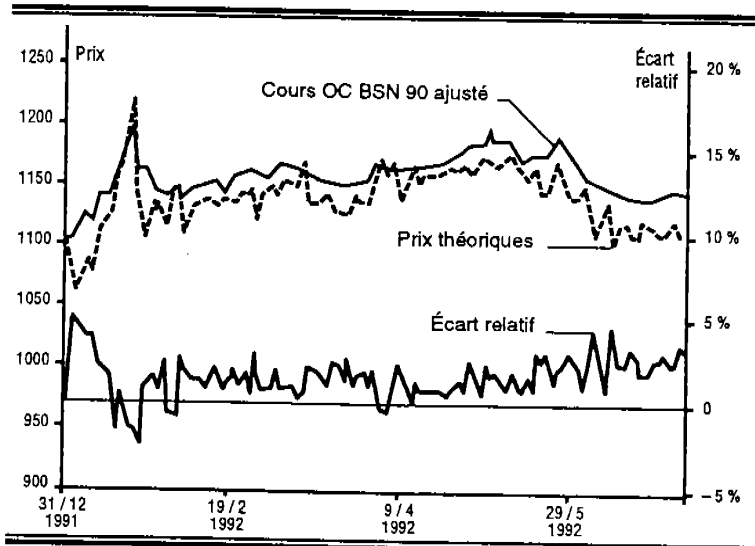
Nous donnons à titre d'exemple les résultats obtenus pour l'OCBSN évaluée sur la période 91-92 * :

CARACTÉRISTIQUES DE L'OBLIGATION CONVERTIBLE BSN 6,6 % 2 000	
Nombre d'obligations	2 760 000
Prix d'émission	900 F.
Nominal	900 F.
Taux facial	6,60 %
Date du coupon	1er janvier
Montant du coupon	1er janvier 91 : 53,21 F. ensuite : 59,40 F.
Date de règlement	8 février 1990
Echéance	1er janvier 2000
Prix de remboursement	110 % soit 990 F.
Amortissement anticipé	au pair à partir du 1er janvier 93 si l'action dépasse 1 170 F
Convertibilité	à partir du 12 février 90 1 action pour une obligation

133

Graphique 1

Comparaison : prix de marché / prix théorique



Ce graphique montre que, d'une part, les fluctuations du prix de marché de l'O.C. BSN sont bien appréhendées par le modèle, que d'autre part l'O.C. BSN apparaît constamment sous-évaluée par le marché sur la période.

Quant à l'activité constatée sur ce segment de marché, on peut avancer que son récent développement tant en terme de marché primaire que de marché secondaire, est en partie lié au contexte de volatilité accrue des marchés mais aussi à l'apparition chez nombre d'investisseurs de la logistique indispensable à la mise en place d'une activité d'arbitrage sur ces produits hybrides. Il paraît raisonnable de prétendre que si les méthodes numériques présentaient la même facilité et simplicité d'utilisation que la formule de Black et Scholes, la liquidité des obligations convertibles aussi complexes soient-elles s'améliorerait considérablement.

Les obligations à taux variable

La spécificité d'une obligation à taux variable réside dans le fait que chacun des coupons supporte un aléa et doit être appréhendé comme un actif conditionnel, contrairement à ce que préconise la méthode de cristallisation de l'indice de référence usuellement retenue par le marché pour évaluer les emprunts à taux variable.

134

Pour évaluer chacun des coupons variables, on utilise une méthode probabiliste basée sur un modèle aléatoire de déformation de la courbe des taux. On suppose en effet que chacun des prix de zéro-coupon de la courbe reconstituée suit un processus de diffusion du type lognormal, avec un taux court aléatoire et une fonction de volatilité déterministe et décroissante en fonction de la maturité résiduelle du zéro coupon.

Ce modèle d'évolution permet alors d'écrire les taux zéro-coupon d'une date future comme fonction des taux forward lus sur la courbe des taux aujourd'hui, auxquels on ajoute un biais de volatilité plus un troisième terme, d'espérance nulle, représentant l'aléa futur.

Compte tenu du modèle d'évolution des taux retenus, l'évaluation d'un flux indexé sur une référence variable repose alors sur les deux principes classiques suivants :

- sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage,
- il existe une probabilité Q , appelée probabilité risque neutre, sous laquelle tous les actifs, notamment les zéro-coupon, ont un rendement qui est égal aux taux instantané sans risque,
- le prix aujourd'hui d'un flux futur n'est rien d'autre que la valeur moyenne (l'espérance sous la probabilité risque-neutre) du flux actualisé.

La formule de valorisation d'un taux variable est donc la suivante :

* Pour d'autres O.C. voir le cahier de la CAR de H. Berestycki, M. Romano et al. (février 1993).

$$P = E^Q \left(\sum_{i=1}^{i=n} e^{-\int_0^{T_i} r_u du} F_i \right)$$

Où r_t est le taux de rendement sans risque à l'instant t et F_i le i^{me} flux variable payé à la date T_i .

Cette évaluation permet de calculer la valeur actuelle de n'importe quel titre à taux variable quand on peut estimer son indice de référence par le taux d'une certaine maturité lu sur la courbe des taux. La somme des valeurs actualisées des coupons variables donne donc le prix aujourd'hui de l'actif, en fonction du seul paramètre de volatilité des taux.

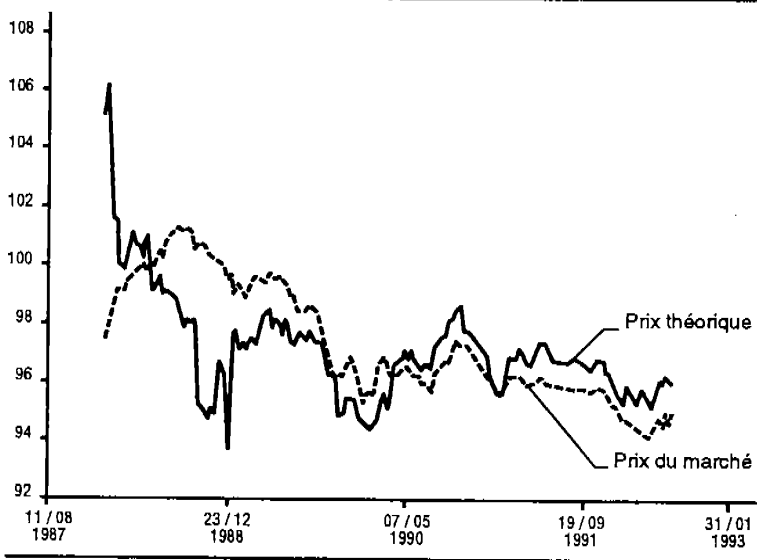
Inversement, ce paramètre de volatilité peut être obtenu de façon implicite à partir des prix de marché, comme pour les options, en inversant la formule explicite obtenue. Ce terme de volatilité mesure, en fait, l'écart entre le prix « forward » lu sur la courbe des taux aujourd'hui et le prix de marché : c'est un paramètre qui mesure le risque lié à l'instrument (risque de volatilité des taux, risque de liquidité...).

Nous illustrons cette description du modèle par les résultats obtenus sur l'Obligation Assimilable au Trésor TME Janvier 98. (OAT TME 1/98)

La courbe ci-dessous représente respectivement les prix de marché et les prix théoriques de cette obligation à taux variable.

Graphique 2

OAT TME 1/98



A chaque date de calcul, on estime les THE futurs par des taux zéro coupon forward de maturité 10 ans.

Pour le premier coupon les indices THE relatifs à la période écoulée sont connus, alors que les suivants sont estimés par le modèle d'évaluation précisé ci-dessus*.

On distingue sur ce graphique, deux grandes périodes :

– de la mi 88 à la mi 90, les prix théoriques sont constamment inférieurs au prix de marché ;

– de la mi 90 à fin 92, le phénomène inverse est observé.

Néanmoins, sur une grande partie de la période de test (à partir du début 89), on constate une forte similitude entre les fluctuations des prix de marché et des prix théoriques.

Emprunts indexés à cliquets

Apparus au cours de ces deux dernières années, les emprunts dont la valeur de remboursement dépend de la performance d'une action ou d'un indice sont d'une grande diversité.

Avec ou sans cliquet, de paiement intermédiaire ou différé, avec ou sans plafonnement des performances d'indexation, telles sont les principes caractéristiques de cette catégorie d'emprunts.

136

OBLIGATION A CLIQUETS INDEXÉS SUR LE CAC40	
EMETTEUR	CLF
CHEFS DE FILE	SOCIÉTÉ GÉNÉRALE ET C.D.C
MONTANT	550 MF
PRIX D'ÉMISSION	100 % (pas de prime d'émission)
DATE DE LANCEMENT	décembre 1991
DATE DE RÈGLEMENT	janvier 1992
DATE D'ÉCHÉANCE	janvier 2000
COUPON	Les obligations ne portent pas d'intérêt
MONTANT REMBOURSÉ	A l'échéance, le prix de remboursement de chaque obligation sera égal à son montant nominal auquel s'ajoutera le montant suivant : $(C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C6 + C7 + C8) \times \text{Nominal}$
Chaque cliquet C_i correspond à la performance positive de l'indice CAC40 l'année i suivant la date de règlement, calculée par le rapport :	
$\frac{\text{CAC}(i) - \text{CAC}(i-1)}{\text{CAC}(i-1)}$	
avec : CAC (i) : cours du CAC40 à la ième date anniversaire de la date de règlement.	
CAC (0) : cours du CAC40 à la date du lancement.	
Chaque cliquet ne peut cependant ni être inférieur à 0 % ni être supérieur à 35 %.	
Les cliquets sont constatés annuellement mais ne sont remboursés qu'à maturité.	

* Pour d'autres applications, cf. lettre de la CAR/juin 1992 et document CAR Cberif(1991) et El Karoui (1991).

L'apport de la théorie des options à l'évaluation de ces produits est évident puisque ceux-ci se décomposent très simplement en une combinaison d'options élémentaires.

Prenons pour exemple l'emprunt indexé CLF émis en décembre 1991 de maturité 8 ans et dont les caractéristiques sont indiquées dans le tableau de la page précédente.

$$\text{Min} \left(35\%, \text{Max} \left(\frac{CAC_t - CAC_{t-1}}{CAC_{t-1}}, 0 \right) \right) = \frac{1}{CAC_{t-1}} [\text{Max} (CAC_t - CAC_{t-1}, 0) - \text{Max} (CAC_t - 1,35 CAC_{t-1}, 0)]$$

Le cliquet se décompose donc, en l'achat d'un Call de strike CAC_{t-1} et la vente simultanée d'un Call de strike $2,35CAC_{t-1}$.

Dans le cas de cette obligation composée de 8 cliquets annuels plafonnés à 35 % de la performance du CAC sur la période, il est aisé d'appliquer la formule de Black et Scholes à chacun des cliquets en remarquant que le paiement :

Sous les hypothèses de Black et Scholes, on peut facilement constater que la valeur de chacun des cliquets à l'instant 0 est indépendante de CAC₀ et n'est fonction que du taux de financement, du niveau de volatilité de l'indice CAC et de la durée du cliquet.

Il est bien entendu qu'une approche plus rigoureuse implique la prise en compte d'une structure par terme des taux d'intérêt, d'une structure de volatilité de l'indice CAC en fonction de la maturité de l'actif conditionnel sous-jacent et nécessite donc des méthodes d'évaluation plus élaborées de type explicite ou numérique.

137

PRODUITS FINANCIERS À OPTION IMPLICITE COMPLEXE

Depuis quelques années, on a vu apparaître des produits financiers dont les caractéristiques font apparaître des instruments dérivés de plus en plus complexes. Parmi ces instruments, on peut citer les options à barrières, les options « lookback », les options « Best of », les options « Quanto », etc.

Ces produits se distinguent des produits classiques par le fait qu'ils ne peuvent être synthétisés par une simple combinaison d'options élémentaires. Ils se différencient aussi par leur caractère de dépendance de plusieurs sous-jacents.

En effet, pour les options à barrières, et les options « lookback », le cours de l'indice ainsi que ses niveaux maximal ou minimal atteints pendant une certaine période constituent les sous-jacents majeurs.

Pour l'option « Best of », son paiement final dépend des performances respectives de plusieurs indices de marché ce qui la rend « multivariée ».

Enfin l'option « Quanto » a pour sous-jacents un indice ou une action et une devise étrangère.

Dans cette partie, nous nous proposons de décrire, dans le cadre de produits existants, comment les différents instruments dérivés rentrent en jeu et comment la théorie des actifs contingents permet de les valoriser.

Les produits « Path Dependant »

Avec l'appellation « produit path dépendant », nous résumons la plupart des produits apparus ces dernières années, à base de composantes optionnelles dont le paiement final dépend du chemin parcouru par le sous-jacent.

Parmi ces composantes optionnelles, on peut citer trois grands types d'options :

- l'option sur moyenne
- l'option à barrière
- l'option « lookback »

L'option sur moyenne est une option qui se distingue de l'option classique par le fait que l'on prend comme prix d'exercice à la fin de la période optionnelle, la moyenne des cours observés durant la période.

L'avantage de ce genre d'actif conditionnel est le moindre coût de la prime pour une meilleure protection contre un mouvement brutal du marché grâce au lissage effectué.

D'un point de vue technique, l'évaluation d'une telle option, sous les hypothèses du modèle de Black et Scholes, n'est pas explicite.

En effet, la moyenne des cours supposés lognormaux ne peut pas être lognormale ; on ne peut appliquer directement la formule de Black et Scholes à la moyenne des cours.

Des procédures numériques [(cf. Barles, Daber et Romano (1991)), ou des approximations par des formules de Black et Scholes « aménagées » sont donc nécessaires [(cf. Bouaziz, Brys et Crouhy (1991))]

Le deuxième type d'option est celui qui caractérise l'option avec barrières où l'on distingue celles dites désactivantes (« out ») et celles dites activantes (« in »), la barrière étant une certaine valeur prédéterminée du sous-jacent.

Une option avec barrière activante, bien qu'elle donne lieu au paiement d'une prime dès le départ, n'existera que lorsque le cours du sous-jacent aura atteint la barrière.

A l'inverse, une option avec barrière désactivante, existe dès le départ mais disparaît dès que la barrière est atteinte.

Le phénomène de barrière, bien connu en physique se modélise par des fonctions non markoviennes, de type maximum ou minimum du sous-jacent sur une certaine période. La valeur intrinsèque de l'option à barrière s'identifie à un paiement classique :

Max (S-K, 0) multiplié par une fonction indicatrice sur le maximum du sous-jacent.

Pour l'évaluation de produits plus complexes combinant une barrière activante et une barrière désactivante, la valeur intrinsèque se ramène à un

paiement classique conditionné par une double indicatrice. Dans le cadre probabiliste de Black et Scholes, l'obtention de formules d'évaluation explicites reste possible à partir du moment où la loi du triplet (S, MaxS, MinS) est connue (Cf. Karatzas-Shreve (1988)).

Le troisième type d'option « Path Dependant » regroupe les options dites « *lookback* » où le prix d'exercice de l'option est déterminé à partir de l'évolution du sous-jacent pendant la période optionnelle (Maximum ou Minimum atteint par le sous-jacent);

L'achat de ce type d'option permet de profiter de la volatilité du sous-jacent puisque le paiement final est égal, par exemple, dans le cas d'un call à l'écart entre le sous-jacent et sa valeur minimale enregistrée au cours de la vie de l'option. A partir de l'hypothèse de lognormalité du cours, les lois de (max S, S) et de (min S, S) sont connues et permettent facilement d'explicitier les prix des options lookback (cf. Conze-Wiswanathan (1991)).

Si ces différentes options « Path Dependant » sont apparues il y a déjà quelques années sur le marché des changes, leur utilisation dans la conception de nouveaux produits obligataires ou actions est très récente.

Ainsi pour prendre un exemple qui nous est proche, la CAR a procédé le 31 juillet 1992 à sa première émission d'emprunts à cliquets et barrières indexées sur la performance du CAC40. Les caractéristiques de cette émission sont rappelées dans le tableau ci-dessous.

139

Emetteur :	CAISSE AUTONOME DE REFINANCEMENT
Chef de File :	CAISSE DES DÉPÔTS ET CONSIGNATIONS
Montant :	FRF 300.000.000 (Euro-émission)
Prix d'émission :	le pair
Date de lancement :	31 juillet 1992
Date de règlement :	4 semaines après la date de lancement
Maturité :	31 juillet 2000
Coupon :	zéro
Indexation :	L'indexation porte sur la prime de remboursement. Le montant remboursé à l'échéance est égal à :
	Nominal + [Nominal x 100 % x (Perf ₁ + Perf ₂)]
	$\text{avec : Perf}_1 = \text{Max} \left(\frac{(\text{NP1} - \text{CAC}_0)}{\text{CAC}_0}, 0 \right)$
	$\text{Perf}_2 = \text{Max} \left(\frac{(\text{NP2} - \text{CAC}_4)}{\text{CAC}_4}, 0 \right)$
	CAC ₀ : niveau de l'indice CAC40 à l'émission
	CAC ₄ : niveau de l'indice CAC40 au bout de 4 ans
	NP1 : Niveau Protégé 1, c'est-à-dire le <i>plus fort</i> niveau entre :
	- le niveau de l'indice CAC40 au bout de 4 ans

- le plus haut palier atteint par l'indice pendant les 4 premières années entre 133 %, 167 % et 200 % du premier niveau de référence de l'indice (CAC_0).

NP2 : Niveau Protégé 2, c'est-à-dire le *plus fort* niveau entre :

- le niveau de l'indice CAC40 au bout de 8 ans ;
- le plus haut palier atteint par l'indice pendant les 4 dernières années entre 133 %, 167 % et 200 % du *second* niveau de référence de l'indice (CAC_0).

EMPRUNT CAR A CLIQUETS INDEXÉ SUR LE CAC40

Dans le calcul de la performance $perf_1$, par exemple, le niveau protégé NP_1 donne lieu à un paiement « Path dépendant » du type :

$$NP_1 = \text{Max}(CAC_4; 1,33 * CAC_0 * 1_{(1,33 CAC_0 \leq \text{Max}[0,4] CAC_4 < 1,67 CAC_0)} + \\ 1,67 * CAC_0 * 1_{(1,67 CAC_0 \leq \text{Max}[0,4] CAC_4 < 2 CAC_0)} + \\ 2 * CAC_0 * 1_{(2 CAC_0 \leq \text{Max}[0,4] CAC_4)})$$

Ce qui donne une performance de la forme :

$$perf_1 = \text{Max}(R_4; 0,33 * 1_{(0,33 \leq \text{max}[0,4] R_s < 0,67)} + \\ 0,67 * 1_{(0,67 \leq \text{max}[0,4] R_s < 1)} + 1_{(1 \leq \text{max}[0,4] R_s)})$$

Où R_s est la performance du CAC pour la période $[0,s]$, c'est-à-dire :

$$R_s = \frac{CAC_s - CAC_0}{CAC_0}$$

Malgré la non-linéarité évidente, par rapport au paiement classique d'une option à barrière, introduite dans la définition de $perf_1$ et $perf_2$, l'évaluation se fait sans trop de labeur à partir du moment où l'on connaît la loi de probabilité du couple $(R, \max R)$ où R est la performance du CAC sur une certaine période [(cf. Karatzas-Shreve - (1988)].

Pour conclure ce paragraphe sur les options « path dépendant », rappelons seulement que, bien que les produits financiers combinant ce type d'options ne soient apparus sur le marché français que très récemment, ils offrent déjà une grande diversité de garanties aux investisseurs.

Les produits dits « best of »

Il s'agit de produits obligataires dont les coupons ou la valeur de remboursement sont liés à la meilleure performance de plusieurs indices de marché.

Dans certains cas, ces indices s'identifient à des taux d'intérêt. Dans d'autres cas, les indices de référence sont des indices actions (par exemple

un zéro-coupon obligataire dont la valeur de remboursement est fonction du maximum des performances du CAC, du DAX et du SP500).

Lorsque le coupon variable ou la valeur de remboursement sont référencés sur plusieurs taux (cf. description du TSDI Rhône Poulenc, en annexe) on utilise le modèle de déformation de la courbe des taux décrit en première partie, dans le cas des obligations à taux variable, pour déduire les processus suivis par les taux des différentes maturités.

La difficulté supplémentaire réside dans la non-linéarité introduite par le maximum entre plusieurs indices. Néanmoins, au moyen de techniques de changement de numéraires [(voir Rochet - El Karoui - Geman (1992)], on obtient des formules explicites.

Dans le cas où la référence porte sur des performances d'indices actions, chacun des risques action doit être modélisé séparément, tout en introduisant une matrice de corrélation entre les différents aléas. Ceci complique l'évaluation de produits indexés qui nécessite alors l'utilisation de procédures de calcul de lois multivariées.

Produits « Quanto »

Ce vocable regroupe les produits conditionnels qui supportent un risque action dans une devise étrangère. Dans cette partie, nous allons décrire brièvement les quatre types d'options « Quanto » qu'on rencontre sur le marché.

141

Le premier type de produit « Quanto » recouvre les options sur action étrangère dont la valeur intrinsèque est exprimée dans la devise étrangère. L'investisseur domestique qui acquiert par exemple un call de ce type désire profiter des gains sur une action étrangère sans se soucier du risque de change inhérent à l'opération. Dans ce cas, le paiement final est de la forme :

$$C = X * \text{Max}(S - K, 0)$$

Où X est le taux de change * (le prix d'une unité de la devise exprimée en monnaie domestique), S et K étant respectivement le prix du sous-jacent et le prix d'exercice libellés dans la devise.

Le second type de produit « Quanto » repose sur des options de sous-jacent une action étrangère convertie à tout instant en monnaie domestique. Le paiement à l'échéance est :

$$C = \text{Max}(S * X - K, 0)$$

A la différence du premier produit le sous-jacent de cette option supporte à la fois un risque d'action et un risque de change. Le prix d'exercice est bien sûr libellé en monnaie domestique.

Un autre type de produit « Quanto » regroupe des options classiques sur une action étrangère mais dont le paiement final est converti en monnaie

domestique au moyen d'un taux de change prédéterminé. Le paiement s'écrit, dans ce cas-là, de la façon suivante :

$$C = X \cdot \text{Max}(S - K, 0)$$

Où X est le taux de change prédéterminé.

Enfin, le dernier type de produit « Quanto » consiste en l'acquisition (ou la vente) d'une action étrangère, conditionnée par la valeur d'une option de change classique, c'est-à-dire, de paiement final suivant :

$$C = S \cdot \text{Max}(X - X, 0)$$

où X est le prix d'exercice de l'option de change.

Pour l'évaluation de ces différents types de produits Quanto, on revient au principe de base de l'arbitrage : dans chacun des deux pays, le prix théorique d'un flux conditionnel n'est rien d'autre que la valeur moyenne du flux actualisé dans un univers risque neutre. Il faut, cependant, mentionner que dans un univers multidevisé la notion de probabilité risque neutre n'a pas de raison d'être la même dans chacun des pays. Il est donc essentiel de préciser à chaque instant comment se fait l'arbitrage entre le pays domestique et le pays étranger considéré. Le moyen naturel est de considérer que le prix d'un actif étranger transcrit en monnaie domestique se comporte comme un actif fictif domestique (principe de transfert).

142

En appliquant ce même principe, à l'ensemble de la structure des taux du pays étranger, on montre que celle-ci est arbitrée avec la structure des taux domestiques à condition que le taux de change suive une dynamique de la forme suivante [(à la Garman-Kolbagen (1983)) :

$$\frac{DX}{X} = (r_i^d - r_i^f) dt + \sigma_x dw_t^x$$

Où $(r_i^d - r_i^f)$ est le spread entre les taux sans risque des deux pays et σ_x la volatilité instantanée du taux de change.

Il apparaît dans cette formule que le taux de change peut être assimilé à un titre domestique payant un taux de dividende continu.

Une fois retenue l'hypothèse de lognormalité des prix des actifs étrangers, c'est à dire :

$$\frac{dS}{S} = r_i^f dt + \sigma_s dw_t^f$$

Où σ_s est la volatilité instantanée de l'actif étranger S .

Le principe de transfert cité plus haut permet de prolonger les formules classiques de Black et Scholes au cas où la valeur intrinsèque des options « Quanto » fait intervenir aussi bien un risque action qu'un risque de change.

Pour l'évaluation de ces produits sous des hypothèses générales de diffusion de la structure par terme des taux, la plupart des résultats obtenus dans le cas d'une structure des taux non aléatoires sont encore valides (cf. El Karoui - Cherif 1992).

Ce rapide tour d'horizon des nouveaux produits conditionnels, a mis en évidence la robustesse de la théorie de Black et Scholes, dans le sens où celle-ci peut être étendue) à l'évaluation de produits qui supportent plusieurs risques : risque de taux, risque action, risque de change.

En ce qui concerne le montage de nouveaux produits, les extensions de la théorie de Black et Scholes sous certaines hypothèses ad hoc, semblent constituer l'outil d'évaluation approprié.

Par contre, en terme de gestion de ces produits, l'application directe des méthodes de couverture sous-jacents aux extensions de la théorie de Black et Scholes doit être menée avec beaucoup de prudence compte tenu des biais induits par la non-lognormalité des marchés, les coûts de transactions relatifs aux produits négociés de gré à gré, et enfin des difficultés rencontrées pour répliquer simplement ces nouveaux produits au moyen de combinaisons d'actifs liquides du marché. Il semble donc indispensable de réaliser des tests systématiques des modèles retenus dès que l'on possède des historiques suffisamment conséquents.

On peut néanmoins imaginer que d'ici quelques années, à la lumière des expériences de gestion acquises par certains intervenants majeurs du marché, ces produits dits « exotiques » seront bien maîtrisés par le marché.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

143

- F. Black et M. Scholes (1973), « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Political Economy*, 3, pp. 637-654.
- H. Berestycki, M. Romano, J. Burdeau et N. Samsoen (1992), « Les obligations convertibles sont-elles à leur prix ». Document interne CAR et Cahier de la CAR février 93.
- G. Barles, Ch. Daher et M. Romano (1991), « Optimal control on the norm of a diffusion process », *Siam J. on Control and Optimization*, à paraître.
- G. Barles, Ch. Daher et M. Romano (1992), « Convergence of numerical schemes arising in finance theory », CEREMADE - Paris IX.
- L. Bouaziz, E. Briys et M. Grouhy (1991), « The pricing of forward-starting Asian Options », Article de recherche, HEC.
- T. Cherif (1991), « Evaluation des obligations à taux variable et des swaps de taux », Document interne CAR.
- A. Conze et R. Viswanathan (1991), « Path Dependent Options : the Case of Lookback Options », *Journal of Finance* 46, pp. 1893-1907.
- J.C. Cox et S.A. Ross (1976), « A survey of Some New Results in Financial Option Pricing Theory », *Journal of Finance* 31, pp. 383-402.
- C. Daher et M. Romano (1990), « Evaluation of assets with a path dependant

- cashflow ».
- N. El Karoui et T. Cherif (1992), « Arbitrage multidevise : application aux options Quanto », Document interne CAR.
- N. El Karoui (1991), « The valuation of General Floating-Rate notes and Swaps : A Probabilistic Approach », Article de recherche (Université Paris VI) à paraître dans RISK.
- H. Geman, N. El Karoui et J.C. Rochet (1992), « Changes of Numéraire, Arbitrage and Option Pricing », Article de recherche ESSEC-Université Paris VI.
- M. Garman et S. Kohlhagen (1983), « Foreign Currency Option Values », *Journal of International Money and Finance*, 2, pp. 231-238.
- I. Karatzas et S.E. Shreve (1998), « Brownian Motion and Stochastic Calculus », Springer Verlag, Berlin.

Exemple du TSDI Rhône Poulenc - Juin 1991

Calcul du taux d'intérêt. Chaque année, le taux d'intérêt sera égal au plus élevé des trois taux suivants :

- un taux variable indexé sur le taux interbancaire offert à Paris (TIOP) ou Paris Interbank Offered Rate (PIBOR) à un mois ;
- un taux variable indexé sur le taux moyen mensuel de rendement des emprunts d'Etat à long terme (TME) ;
- un taux fixe, qui sera révisé tous les 8 ans, le 30 juin, à partir du taux de rendement d'une obligation assimilable du Trésor (OAT) qui sera la référence à cette date, ci-après dénommé « Taux de rendement de l'OAT de Référence » (cf. paragraphe 3 ci-dessous), affecté d'une marge progressive comme décrit ci-dessous :

Date de paiement de l'intérêt	Taux d'intérêt le plus élevé de :	
du 15 juillet 1992 au 15 juillet 1999 inclus	TIOP 1 mois capitalisé (PIC) du mois de juin précédant l'échéance	+ 0,20 %
	et Moyenne arithmétique des 12 TME précédant le 1er juillet de l'année d'échéance	+ 0,20 %
	et 9, 10 %	
du 15 juillet 2000 au 15 juillet 2007 inclus	TIOP 1 mois capitalisé (PIC) du mois de juin précédant l'échéance	+ 0,70 %
	et Moyenne arithmétique des 12 TME précédant le 1er juillet de l'année d'échéance	+ 0,70 %
	et Taux de rendement de l'OAT de référence révisé le 30 juin 1999 (cf. ch. 3)	+ 0,70 %
du 15 juillet 2008 au 15 juillet 2015 inclus	TIOP 1 mois capitalisé (PIC) du mois de juin précédant l'échéance	+ 1 %
	et Moyenne arithmétique des 12 TME précédant le 1er juillet de l'année d'échéance	+ 1 %
	et Taux de rendement de l'OAR de référence révisé le 30 juin 2007 (cf. ch. 3)	+ 1,10 %

Pour les périodes suivantes, les taux variables seront calculés avec les mêmes marges que pour la période de 2008 à 2015, le taux fixe sera déterminé le 30 juin 2015 pour une nouvelle période de 8 ans et ainsi de suite tous les 8 ans (2023, 2031, etc.) en retenant le taux de rendement de l'OAT de référence du 30 juin, auquel sera ajoutée une marge de 1,10 %.