LE MARCHÉ DE PARIS A LA MÉMOIRE COURTE !

JEAN MATOUK *
JEAN-LOUIS MONINO **

Depuis 1985, le « chaos déterministe » a fait son entrée dans les études boursières. Entrée tardive ! Dans les années 1960, 20 ans auparavant, Benoit Mandelbrott avait montré de manière décisive, que la loi normale par laquelle on prétendait représenter les mouvements des cours, était inappropriée. L'histoire de cette contestation d'une hypothèse qui a eu la vie dure, est très clairement exposée dans son dernier ouvrage[1].

On comprend aisément la « résistance » de la loi normale. La première est une application - elle aussi, erronée - du théorème central limite : si la multiplicité des facteurs qui interviennent dans la formation des cours est indépendante, leur « somme » tendra à suivre une loi normale quand leur nombre tend vers l'infini. Mais pourquoi tous les facteurs de cours boursiers seraient-ils indépendants ? Il est, au contraire, probable que leur covariance est rarement nulle. Le second facteur de résistance de l'hypothèse gaussienne, ou hypothèse « moyenne-variance », est qu'avec une espérance et une variance connue et supposées fixes des cours, elle permet de brillantes démonstrations mathématiques et de beaux « modèles ». En troisième lieu, elle permet de fonder la théorie de l'efficience informationnelle, développée par Eugène Fama. Selon cette théorie le cours reflète immédiatement toute l'information disponible. Si tel est le cas, toutes les informations formant cette « information » disponible étant inconnues l'instant précédent, elles apparaissent bien comme des événements totalement fortuits, engendrant évidemment une marche aléatoire pour leur résultante, le cours.

* Professeur honoraire.
** Professeur, Université de Montpellier I.

Plus profondément, l'édifice théorique de la finance moderne, repose sur deux soubassements : rationalité des comportements des opérateurs en recherche exclusive de l'enrichissement et variations de cours continues qui sont couronnés par l'hypothèse normale ou hypothèse du mouvement « brownien » introduite par Bachelier dans la finance. Malheureusement, comme le démontre Mandelbrott, notamment dans son chapitre dénommé : « Le dossier à charge contre la théorie », les investisseurs ne sont pas tous, ni toujours rationnels - de nombreuses expériences d'économie comportementale prouvent le contraire -, et les buts poursuivis dans l'achat de titres diffèrent, non seulement en fonction de l'aversion au risque - facteur pris en compte par les théories de Markowicz et Sharpe -, mais diffèrent aussi quant aux motifs d'achat ou de vente : ces motifs ne sont pas du tout les mêmes pour un fonds de pension, le gestionnaire du portefeuille titres d'une banque, un particulier qui possède déjà sa résidence principale et s'est constitué une retraite assurée, et un autre qui doit encore les constituer ; certains investisseurs « sont » plutôt « valeur », c'est-à-dire qu'ils recherchent des sociétés sous cotées, sur lesquelles des plus-values sont plausibles à un terme qui leur importe moins, d'autres sont « croissance », recherchant des espérances de gains à terme court. De nombreux modèles de gestion de portefeuille ont d'ailleurs tenté de combiner ces deux motifs, soit à partir de l'usage de momentum[2] divers, soit à partir de consensus d'experts sur les profits ou valeurs attendus.

En second lieu, contrairement à l'hypothèse qui fonde de nombreuses études économiques, l'évolution des cours de Bourse est loin d'être continue. Les cours font des sauts brutaux dans un sens ou l'autre. Ceci signifie que l'application du calcul différentiel, qui, en particulier, fonde le modèle de Markowicz, n'est pas pertinente. Divers auteurs ont tenté de « sauver » l'hypothèse gaussienne par des montages de plus en plus complexes - ARIMA, ARCH, GARCH... - revenant, en fait, à ajouter une complexification au modèle pour chaque « anormalité » constatée. Méthode évidemment vouée à l'échec !

C'est pourquoi, depuis une quinzaine d'années, d'autres auteurs, ont étudié les cours boursiers, en s'abstenant de l'hypothèse de normalité, sous toutes ses formes[3]. Certaines ont apporté des arguments en faveur de la nature chaotique déterministe des marchés d'action ; d'autres sont plus incertaines. Souvent ces études ont souffert d'une insuffisance de données.

Les premiers et principaux travaux sont américains. Ainsi Peters (1989, 1991, 1996) analysant les données mensuelles du S&P 500 de 1950 à 1988, trouve un coefficient de Hurst de 0,78, largement supérieur à 0,5, chiffre qui caractérise une course purement aléatoire. Ce dernier apparaît lorsque l'on atteint un intervalle de plus de 48 mois, soit

4 ans. Il y aurait donc en jeu une mémoire longue dans l'indice S&P dont l'amplitude maximale serait 48 mois. Classant ensuite aléatoirement les données mensuelles sur ces 38 ans, et recalculant le coefficient de Hurst, Peters trouve une valeur de 0,5, logique compte tenu de la course aléatoire par construction de cette série reconstituée, démontrant, d'ailleurs, du même coup, la légitimité du coefficient de Hurst pour discerner le caractère chaotique. Le diagramme de phase du S&P est à deux lobes dans les quadrants II et III ; la dimension fractale de son attracteur est entre 2 et 3, ce qui conduit l'auteur à envisager trois groupes de facteurs causaux. En premier lieu, les facteurs techniques, c'est-à-dire essentiellement les mouvements dus aux réactions immédiates, notamment des professionnels, qui seraient à l'origine de « l'étirement » du diagramme de phase en deux lobes ; ensuite les facteurs fondamentaux (taux d'intérêt, diverses variables) qui ramènent le cours vers son « attracteur » ; enfin un troisième groupe de facteurs qu'il attribue à la liquidité, sans pour autant, bien sûr, apporter de preuves certaines à cette triple correspondance.

Pour notre part, c'est au marché de Paris que nous consacrons cet article. Divers calculs ont été faits pour qualifier sa nature, gaussienne ou chaotique Avant de les exposer, il paraît toutefois important de mener une brève réflexion théorique sur les mécanismes mêmes qui président à la formation des cours, et qui, quel que soit le « modèle » que l'on choisisse pour les représenter, puissent trouver leur place dans ce modèle.

LA FORMATION DES COURS BOURSIERS, MÉCANISME FRACTAL

Chaque phénomène instantané a une ou plusieurs causes qui conduisent à son accomplissement. Le lien entre ces causes et le phénomène peut être très simple : une force F agissant sur un corps de masse m, et lui conférant une accélération γ selon la formule $F = m\gamma$, l'attraction exercée sur une planète particulière par le soleil qui imprime à la planète un parcours périodique ; en économie le volume importé par un importateur monopsonique d'un bien A fourni par un monopole et sans substitut pour la production d'un autre bien B, est directement proportionnel aux volumes du bien B produit.

Mais, en général, la liaison est complexe et la décrire devient extrêmement compliquée. On sait[4], par exemple, que le célèbre mathématicien Henri Poincarré renonça à répondre précisément à la question posée, avec un prix de 2 500 couronnes à la clé, par le roi Oscar de Suède, en 1887, sur la stabilité du système solaire et des 11 corps qui exercent leur attraction les uns sur les autres, arguant qu'il était déjà très difficile de répondre s'agissant de trois corps, même dans l'hypothèse la plus simple, proposée par Hill où les trois corps étaient Pluton, Neptune et un grain de poussière interstellaire. Mais Poincarré, dans son mémoire en réponse, baptisé « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique », substitua un raisonnement topologique à la recherche de solutions périodiques par l'analyse et imagina une méthode pour mettre à jour l'existence ou non de solutions périodiques.

La nature ne génère donc pas spontanément le « hasard ». Dieu ne joue pas aux dés ! On peut même affirmer que le hasard ne peut être que construit par l'homme. Même dans le jeu de la boule ou de la roulette, il serait théoriquement possible de prévoir le trou chiffré dans lequel s'arrête la boule, en fonction de la position initiale de la roue, et des caractéristiques dynamiques du jet par le croupier.

Mais notre incapacité à analyser la grande complexité nous a amenés à inventer le « hasard » pour représenter ce que nous ne comprenons pas, ou pas complètement, pour le « modéliser » faute de mieux. Comme le disait Laplace : « Nous devons à la faiblesse de l'esprit humain une des théories les plus ingénieuses des mathématiques, à savoir la science des hasards ou de la « probabilité »[5] ». Par une autre voie, introduisant le rôle des conditions initiales, mais conduisant à la même conclusion du « hasard » comme explication de second rang, Henri Poincarré, dans une phrase qui renvoie à la trop fameuse image du battement d'aile du papillon, nous dit aussi : « Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la Nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire la situation de ce même univers à un instant ultérieur... Mais une petite erreur (sur les conditions initiales) produit une énorme erreur (sur les conséquences). La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit ». Il aurait dû écrire « et nous en sommes réduits au phénomène fortuit ». Steward dit, dans le même sens : « Si tout ce que vous voyez est une minuscule fraction d'un mouvement incroyablement compliqué, celui-ci *paraîtra* aléatoire, il *paraîtra* sans structure ».

On peut encore citer Grégory Bénichou[6], docteur en pharmacie et philosophie, lequel reproche aux généticiens, qui cherchent à décrypter une information planifiée, un ordre subtil que le bon sens rechigne logiquement à imputer au hasard, de se référer constamment à l'énigmatique pouvoir d'un « hasard créateur ».

En résumé, le hasard n'existe pas dans la « nature ». Les mécanismes qu'on y découvre sont déterministes. Mais ces déterminismes sont éminemment complexes et peuvent conduire à des phénomènes chaotiques, ayant l'apparence du hasard.

Les marchés financiers n'échappent pas à ce principe. La valeur d'un titre et son évolution sont le produit de causes qui nous échappent parce qu'elles passent par les décisions de milliers d'individus, influencés à des degrés et des moments divers par des centaines d'hommes et des milliers d'information.

Essayons d'y voir plus clair ! Fondamentalement, le prix d'un titre, son « cours », résulte de l'action - ou de la passivité - de porteurs ou acquéreurs de titres, les « opérateurs », qui peuvent acheter, vendre ou garder. Qu'est-ce qui les motive ? Les informations qu'ils reçoivent. On distingue traditionnellement deux grands types d'informations : les informations qui viennent de l'extérieur du marché, ou informations exogènes, et l'information endogène au marché, qui est le cours lui-même, au travers duquel chaque opérateur croit comprendre comment agissent tous les autres.

Comment ces diverses informations sont-elles saisies et exploitées par les divers opérateurs ? Poser cette question est une autre façon de poser la question de la formation du cours.

On peut faire l'hypothèse générale que les opérateurs se répartissent en « cercles concentriques », à partir du « point-date » d'émission des informations selon l'intensité de leur intérêt pour ces informations, selon leur « capacité informationnelle ». Certains particuliers se tiennent au courant heure par heure ; on en connaît même aujourd'hui qui passent une bonne partie de leur journée devant l'écran d'un site boursier. D'autres écoutent les informations une fois par jour. À l'autre extrémité du spectre d'intérêt, certains ne s'intéressent à leur portefeuille qu'une fois l'an, lors du paiement des droits de garde et des commissions de gestion. En principe, les « professionnels » de la gestion de titre appartiennent à la première catégorie. En tout cas, chaque information atteint évidemment en premier ceux dont l'intérêt pour la Bourse est le plus intense.

Mais l'effet de ce premier facteur est lui-même éclaté selon le type d'information car, à intérêt général égal pour la Bourse, tous les opérateurs n'accordent pas le même intérêt à tous les facteurs. Dans l'information exogène, il faut, en effet, distinguer l'information macro-économique, c'est-à-dire les annonces faites par divers institutions, sur le taux d'intérêt, le taux d'inflation, la croissance et le chômage, les exportations, les intentions d'investir, le moral des consommateurs, mais aussi le informations « politiques » comme les inflexions annoncées dans la politique économique, ou, ce qui les laisse souvent anticiper, dans les hommes « aux affaires », mais aussi, bien sûr, les événements internationaux, comme les décisions annoncées dans les réunions internationales, les « nouvelles » sur les divers pays, les grèves, les phénomènes climatiques, comme la sécheresse ou les ouragans, les attentats... Mais l'information exogène, ce sont aussi toutes les annonces des sociétés, aussi bien celles qui sont rendues obligatoires par les lois boursières, que celles que souhaitent donner les sociétés elles-mêmes, des comptes annuels aux alertes sur les résultats, y compris les changements de dirigeants.

Si les professionnels sont à l'affût de toutes, ils ne leur accordent pas tous le même poids. Il en va exactement de même des particuliers ; certains ne s'intéressent qu'aux informations non boursières données sur les sociétés, dans les premières parties des journaux économiques, estimant que ce sont les bonnes pour anticiper et prendre position avant les autres. D'autres au contraire, ne s'intéressent qu'aux commentaires des parties boursières des journaux, bien que ces « avis », ayant été préalablement connus de divers professionnels, soient déjà intégrés plus ou moins dans le cours. L'intérêt pour la Bourse varie donc aussi en fonction de l'information concernée

Ajoutons que même à intensité d'intérêt égal pour la Bourse, et pour la même information, tous les opérateurs n'ont pas la même « capacité cognitive ». C'est principalement vrai pour les particuliers. Certains ont une compétence économique avérée et exploitent donc l'information, d'abord plus vite, et plus efficacement ; d'autres, moins.

On comprend donc bien que la Bourse ressortit bien à la catégorie des phénomènes « complexes », c'est-à-dire aux facteurs multiples et variables, éventuellement covariant, et dont les liaisons factorielles n'ont aucune raison d'être linéaires.

Enfin, on doit tenir le plus grand compte du phénomène mimétique. Celui-ci a été modélisé, de manière convergente, par Vaga[7] issu de Callan et Shapiro[8], et par André Orléan, dans un article de 1990[9], issu de Weidlich et Haag, en recherchant les « effets d'agrégation » des opinions dans certaines situations d'incertitude sur le sens des informations fondamentales. Le fondement commun de ces deux approches est l'idée que chaque opérateur se décide à la fois en fonction de ces « fondamentaux », mais aussi en fonction de ce qu'il croit être la position des autres opérateurs ; il y a un « effet de foule » ou « effet de groupe » qui intervient dans la formation des opinions sur un titre ou du « sentiment de marché ».

Pour tenter d'approcher un peu plus précisément le jeu d'un facteur, considérons donc le cercle des opérateurs professionnels les plus immédiatement intéressés par ce facteur. Supposons qu'il pousse à l'achat. Son advenue va entraîner immédiatement deux types de réaction dans ce premier cercle : les uns vont acheter à l'aide d'espèces, les autres vont arbitrer contre d'autres titres qui leurs paraissent moins intéressants. Notons tout de suite qu'ainsi, cet achat va, pour partie, déclencher la vente d'un ou plusieurs autres titres, ce qui influera évidemment sur leurs cours et ce qui entraîne évidemment une covariance entre titres, contrairement aux hypothèses très générales des beaux modèles enseignés depuis 30 ans aux étudiants en finance...

À la période suivante, l'information est saisie dans le second cercle, ce qui y produit les mêmes deux vagues de réaction, achat contre espèces ou arbitrage, mais elles-mêmes subdivisées entre une part liée directement à l'information ; l'autre au mimétisme au sein de ce second cercle d'opérateurs. Le cours du titre continue de monter ! À la période suivante, même quadruple mécanisme d'achat contre espèces, d'arbitrage, avec une part de mimétisme. Mais la hausse du cours peut amener certains acheteurs du premier cercle, mais aussi certains détenteurs qui avaient gardé ces actions, à les vendre pour « prendre leurs bénéfices ». Sur le mouvement ascendant du cours, se produit donc une petite inflexion à la baisse ; si, néanmoins, le cours monte encore, c'est à la quatrième période que les ventes risquent de compenser la hausse liée à l'information initiale, entraînant une petite baisse. Cela peut se produire à la cinquième période seulement. Mais une telle baisse peut, à son tour, mimétisme aidant, dynamiser de nouveaux acheteurs, ou même les premiers qui avaient vendu dans cette séquence.

Nous venons d'utiliser le terme de « période ». Quelle durée concrète cela recouvre-t-il ? L'heure, le jour, la semaine, le mois. Réponse : toutes ! Il y a des cercles concentriques d'opérateurs d'égal intérêt pour le facteur d'heure en heure, de semaine en semaine, de mois en mois et les réactions qui se produisent entre les cercles d'heure en heure « constituent » celles que l'on constate de jour à jour qui, elles-mêmes, « constituent » celles que l'on constate de semaine à semaine...

Le mécanisme que nous décrivons pour chaque « mini-groupe » d'opérateurs concentriques, formant eux-mêmes des groupes concentriques : achat, achat, achat, puis vente, vente... par exemple, ou toute autre séquence, donne l'idée d'un mécanisme périodique. On aurait ainsi un mouvement de marché (de cours) qui serait la superposition d'oscillations périodiques ; c'est d'ailleurs cette idée qui a conduit certains à envisager d'analyser l'évolution des cours par l'analyse de Fourier. Retenons-le pour la suite.

Cette même description, qui semble assez fidèle à la réalité, peut expliquer pourquoi le mécanisme boursier a les caractéristiques d'un mécanisme fractal. Cette caractéristique, que Benoit Mandelbrott a mise en évidence - et qui est d'ailleurs très générale dans la nature et les activités humaines - trouve sa source dans le mécanisme boursier lui-même. Les mini-groupes, concentriques par rapport au « point-date » d'origine, formant eux-mêmes des groupes concentriques et formés de mêmes mini-mini-groupes concentriques formant les groupes ont bien le caractère d'auto-similarité des fractals. Comme un grand nombre de facteurs exogènes, en sus du mécanisme endogène, sont censés influer sur la Bourse - on y revient plus loin - on comprend que le mécanisme soit en réalité « multifractal ». Du moins cet adjectif peut-il être utilisé en ce premier sens.

Mais revenons aux oscillations périodiques accumulées évoquées plus haut. L'étude du mécanisme de turbulence, très important en physique, conduit à une structure de même type : la turbulence provient du fait que l'énergie de mouvement du fluide est progressivement transmise à des tourbillons constituants de plus en plus petits.

Poursuivant son explication, Benoit Mandelbrott, émet l'idée que l'un des facteurs de marché - ou plusieurs - créent un « temps boursier » à partir du temps calendaire. Plus précisément, il utilise l'image d'une « bande » audio ou vidéo sur laquelle les cours sont inscrits et qui, à certains moments est lue à un rythme lent, puis à un rythme plus rapide, voire extrêmement rapide ; c'est une autre façon de présenter la fractalité. Quel est le facteur qui déclencherait ainsi accélération et ralentissement du même mécanisme de base, un mécanisme lui-même complexe puisque résultant de plusieurs facteurs ? Quelle est cette « énergie » boursière qui ferait défiler les cours à une vitesse croissante dans l'image de Mandelbrott ? Une hypothèse peut être tirée à partir de l'étude de la plus simple des fonctions mathématique pouvant ouvrir sur le chaos : la logistique :

$$x_{t+1} = k\, x_t(1-x_t)$$

Pour $k \in (0,3)$, on obtient, à partir de n'importe quelle valeur initiale x_0, un régime stationnaire. X tend à revenir, après oscillations, vers un point qui est son « attracteur ». Pour k = 3, bifurcation ! Jusqu'à environ 3,5, on obtient, pour attracteur, des cycles de période 2, puis dont le nombre de période double. Pour k=3,56, la périodicité du cycle passe à 8 ; pour 3,576, elle atteint 16. Pour k= 3,58, la cascade de doublements successifs de la périodicité fait place au chaos. Mais au sein même du chaos, un ordre temporaire peut se rétablir. C'est donc la variation de k qui provoque les « transitions de phase » analogues à celles que l'on rencontre en physique, par exemple dans les écoulements turbulents.

Ceci laisse penser que l'énergie qui accélère la bande-vidéo, qui conduit le système fractal au chaos, est un paramètre du type du k de la fonction logistique. Mais quel est le mécanisme économique ou social qui tient lieu de paramètre ? Une hypothèse est qu'il a quelque chose à voir avec le mécanisme mimétique décrit, comme évoqué précédemment, par Vaga et Orléan.

On peut fort bien imaginer que des paramètres tels que le s du modèle Orléan, qui fixe la confiance relative des opérateurs en l'information exogène par rapport à la fréquence observée du cours, ou le paramètre h de Vaga qui définit l'effet de foule, sont les équivalents du k de la logistique. Dans les deux cas, des seuils déterminent l'entrée dans le monde du chaos pour le cours comme pour la variable logistique. Ce sont eux les paramètres d'accélération ou de ralentissement du déroulement du film des cours dans l'image de Mandelbrott.

Ceci n'est évidemment qu'une hypothèse. En tout cas, la fractalité des cours boursiers, quel qu'en soit le fondement comportemental, est une réalité. La dimension dite de « Haussdorf-Besivitch », dénommée plus souvent « dimension fractale » depuis Mandelbrott, calculée sur la série, mesure la complexité du mécanisme boursier, détermine bien la rugosité de la courbe, l'espace qu'elle occupe dans le plan. Elle est intéressante en soi, mais elle ne dit rien sur les facteurs des cours. Pour s'en approcher, de manière plus précise que qualitativement, c'est à l'attracteur de la série qu'il faut s'intéresser. C'est sa dimension qui donne une indication sur le nombre de facteurs ou groupes de facteurs du cours. On a dit en introduction que Peters trouve une dimension de 3 pour l'indice S&P 500, donc trois groupes de facteurs produiraient le S&P. Mais il reste ensuite à définir quels sont précisément ces groupes de facteurs. Une piste complémentaire est donnée par les coefficients de Lyapunov, et, notamment, leur signe. Certains facteurs, correspondant aux Lyapunov négatifs, jouent dans le sens de renvoyer le cours vers son attracteur, de replier le processus ; d'autres, correspondant aux coefficients de Lyapunov positifs, « étirent » au contraire le cours.

Nous allons donc tenter maintenant de pousser plus loin cette analyse quantitative sur le CAC 40.

APPLICATION AU CAC 40

Le marché de Paris a déjà fait l'objet de diverses études. Pour la France, Girerd-Potin et Tamarasco concluent à l'impossibilité de repérer de manière significative un phénomène de chaos déterministe sur les rentabilités hebdomadaires du SBF 250 de 1969 à 1991, les tests donnant des résultats opposés. Au contraire, Alexandre en repère un sur le CAC 40.

Dans un article de 1997, Valery Mignon[10], travaillant sur les séries quotidiennes rejette l'hypothèse du chaos déterministe. Si le plus grand exposant de Lyapunov obtenu, est toujours positif, le fait que tous ces exposants restent positifs quand on les calcule sur les données « secouées », dans lesquelles une éventuelle structure aléatoire a été détruite par construction, conduit l'auteur au rejet.

Dans un article de 2000, Thierry Vessereau[11] travaillant pour sa part sur le CAC 40, mais aussi, pour avoir une plage de données plus vaste, sur l'indice Vontobel de Datastream, du 1/1/75 au 31/12/98, et aussi sur 40 actions, qui, compte tenu du recul, ne sont pas toutes celles du CAC 40 aujourd'hui, rejette l'hypothèse aléatoire au profit d'une dépendance non linéaire, pour toutes les séries. Par contre, travaillant sur les résidus d'un processus GARCH, sur les mêmes données, il conclut qu'un tel processus est suffisant pour décrire ces composantes non linéaires.

Dans ce qui suit, nous tentons de reprendre l'étude sur données françaises, en travaillant sur les rendements (variations relatives des cours) afin de rendre la série stationnaire, avec des périodes-cadres ou intervalles de calcul des rendements croissants, entre 1966 et 2002, 1 jour, 5 jours, 10 jours... puis, en travaillant sur des données mensuelles, mais entre 1926 à 2005, avec une interruption que nous négligeons, entre 1943 et 1949.

Pour les rendements journaliers, nous disposons de plus de 8,904 points, soit sensiblement plus que l'étude de Valérie Mignon, et du même ordre que celui de Thierry Vessereau. Pour les rendements mensuels, nous disposons de quelque 950 points, ce qui est insuffisant, mais permet, à tailles voisines, d'intéressantes comparaisons avec le travail de Peters sur le Dow Jones mensuel depuis 1928.

On doit d'abord se poser deux questions de principe. Prendre des intervalles de 5 jours, 10 jours, 20 jours a-t-il un sens, notamment au regard de l'hypothèse de fractalité des cours ? Si un mécanisme multifractal est à l'œuvre, ne risque-t-on pas de « détruire », par ce découpage arbitraire, certains « niveaux » du mécanisme fractal ? L'argument est pertinent, mais à défaut de disposer de données hebdomadaires ou de quinzaine, sachant, comme on l'évoquera plus bas, que le niveau journalier, considéré seul, risque d'être affecté de phénomènes markoviens, le risque mérite d'être pris. Il sera d'ailleurs intéressant, dans un travail ultérieur, de comparer les résultats obtenus avec les données de 5 jours en 5 jours avec les données hebdomadaires, les deux « découpes » temporelles pouvant parfaitement ne pas coïncider. Tout comme il sera intéressant de considérer les rendements d'heure à heure depuis que les cotations sont continues. Dans la même logique, y a-t-il redondance entre les rendements de 20 jours en 20 jours et les données mensuelles. Ce n'est pas non plus évident, les mois calendaires aux termes desquels sont calculés les rendements mensuels, pouvant ne pas coïncider avec 4 fois 5 données journalières.

Ces précisions étant données, nous avons recherché le coefficient de Hurst pour ces diverses séries. Ce coefficient, mis au point par cet hydrologue au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle pour étudier les crues du Nil, est un premier paramètre excellent pour détecter un mouvement non gaussien. Il est calculé en découpant dans la série des sous-séries (« boîtes ») de dimension croissante - 10 jours, 11 jours, 12 jours..., par exemple pour les données journalières (ou 10 intervalles de 5 jours soit 50 jours, 11 intervalles de 5 jours, pour les rendements sur 5 jours, ou encore 10, puis 11, puis 12 intervalles de 10 jours, soit 100, 110, 120 jours, pour les rendements sur 10 jours... mais aussi 10 mois, 11 mois, 12 mois... pour les données mensuelles). Ensuite, pour chaque plage ou « boite » (de 10 jours en 10 jours, 11 jours en 11 jours... 10 mois, 11 mois) on calcule la somme suivante :

$$X_N = \sum (r_u - M_c)$$

r_u étant le rendement en u (par rapport à u-1, donc de jour à jour, 5 jours à 5 jours... fin de mois à fin de mois).

N la taille de la plage en laquelle on découpe la série totale (la dimension de la boîte) que l'on utilise, 10 jours, 11 jours... 10 intervalles de 5 jours, 11 intervalles de 5 jours... 10 mois, 11 mois...

M_c la moyenne de la série.

Pour chaque taille n, on prend le plus grand X et le plus petit et on soustrait ce dernier du premier. On rapporte cette différence R à l'écart type s. Le coefficient de Hurst H est donné par l'équation :

$$R/s = (a.\ N)^H$$

ou encore log (R/s) = H log N + b, obtenu en régressant log R/s sur log N, les largeurs successives des plages.

Si H est plus petit que 0,5, la série est ergodique, ce qui signifie qu'un écart dans un sens entraîne causalement un écart dans l'autre sens. Au-delà de 0,5, la série a une « mémoire », des valeurs passées du cours déterminent son niveau du jour. À 0,5 la série est gaussienne.

Tableau n°1
Tableau des coefficients de Hurst sur les rendements pour divers intervalles

	Hurst Periode 1	Hurst Période 2	Nb points utilisés	Nb de points effectifs
Retard 1 - journalier Point de changement	0,6351 56ème point	0,5	4455	8910
Retard 5 - semaine Point de changement	0,6617 44ème point	0,5003	878	1756
Retard 10 - quinzaine Point de changement	0,7011 26ème point	0,4998	433	866
Retard 20 - 1 mois Point de changement	0,6316 23ème point	0,5	219	438
Retard 30 - mois et une quinzaine Point de changement	0,5962 49ème point	0,5	136	272
Série 50 - 2 mois et quinze jours Point de changement	0,5618 pas de rupture	0,5618	86	172

Comme on le voit (première colonne du tableau ci-dessus et droites de régression en annexes), le coefficient de Hurst sur les rendements journaliers, puis de 5 jours en 5 jours, puis de 10 en 10, de 20 en 20 (en gros un « mois boursier »), de 30 en 30 et de 50 en 50, est supérieur à 0,5 mais croît au fur et à mesure que l'on élargit la période cadre de calcul du rendement, jusqu'à 20 jours, soit un « mois » boursier. Au-delà, il se met à décroître. On constate aussi que (seconde colonne), le coefficient de Hurst devient très proche de 0,5, au-delà d'un point indiqué aussi dans la première colonne : 44$^{\text{ème}}$ point pour l'intervalle de rendement de 5 jours, 26$^{\text{ème}}$ point pour l'intervalle de 10 jours et 23$^{\text{ème}}$ jour pour l'intervalle de 20 jours.

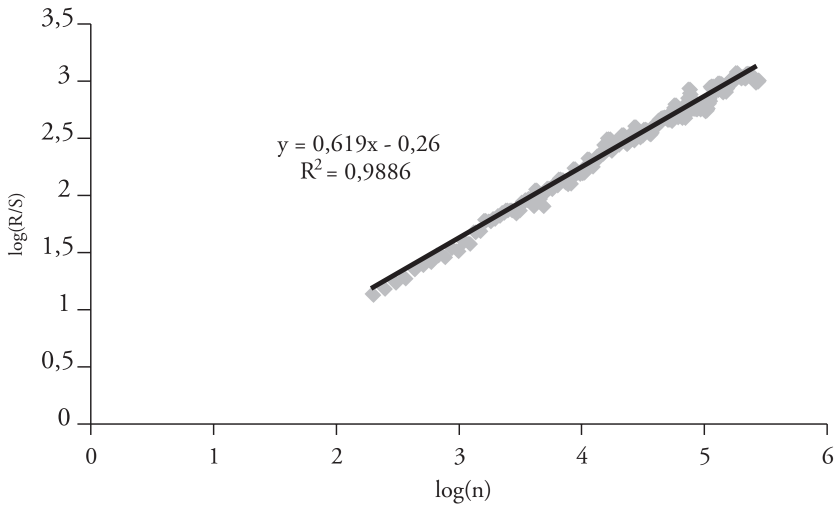
Il paraît légitime, comme le fait d'ailleurs Peters dans ses travaux susdits, de négliger le cas des rendements journaliers, en raison de la présence probable, à ce bref intervalle de temps, de phénomènes markoviens sous l'action compulsive des professionnels, et, par ailleurs, de négliger aussi les rendements sur des intervalles de 30 jours et au-delà, puisque les coefficients de Hurst se rapprochent nettement de 0,5, ce qui signifie que la série se rapproche de la loi normale. Si l'on se limite aux trois intervalles de 5, 10 et 20 jours, on peut, en tout cas estimer que la série n'est pas gaussienne, puisque H est plus grand que 0,5 présente donc une certaine « mémoire » et que la limite temporelle de cette « mémoire », qui anime la série des rendements, est comprise entre 220 jours.

(44 x 5) ou 260 jours (26 x 10), ou encore 460 jours (23 x 20) en moyenne, donc entre 7 et 15 « mois boursiers ». Les droites de régression de log (R/s) sur log H, présentent un « coude » à ces horizons.

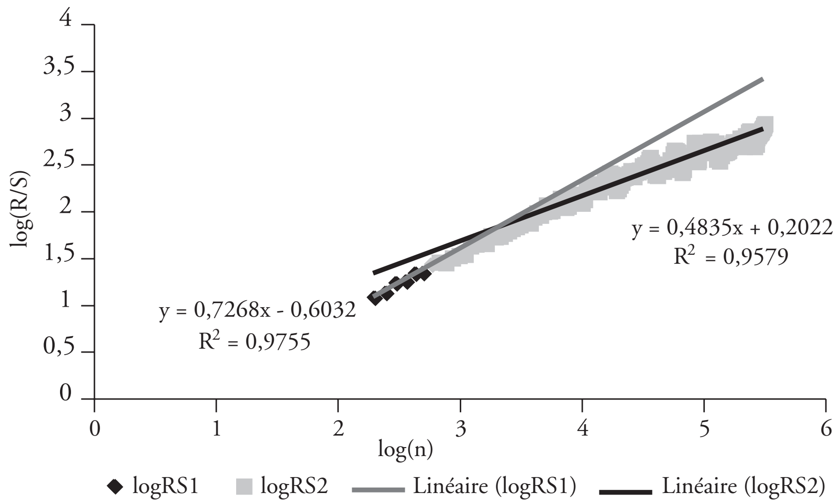
Nous procédons ensuite aux mêmes calculs avec les données mensuelles. Et, dans ce cas, la droite de régression, calculée sur la totalité de la période, 1926-2005, ne présente plus ce coude. Sa pente reste cependant égale à 0,6 ce qui montre que la série des rendements mensuels n'est donc pas non plus gaussienne. Pour approfondir, étant donné l'absence de « coude », c'est-à-dire d'horizon temporel au-delà duquel la série devient gaussienne, ou encore de « cycle », on a considéré séparément deux sous-périodes 1926-1964 et 1964-2005, de longueurs à peu près égales. On constate alors que H vaut 0,619, avec un intervalle de confiance à 5 % de 0,6102 à 0,6277 de manière significative pour la première période, mais sans « coude ».

Pour la seconde sous-période, H vaut 0,5042, mais n'est pas significatif au seuil de 5 %. La série, globalement semble donc gaussienne. Mais on trouve un « coude », un horizon temporel de 16 mois environ, en deçà duquel le coefficient de Hurts est de 0,73, tandis qu'au-delà il est de 0,4835. L'intervalle de confiance pour l'ensemble est de 0,4919 à 0,5164. On remarquera que ce coefficient de Hurst de 0,73, est le même

Graphique n°1
Rendements mensuels de 1926 à 1964



Graphique n°2
Rendements mensuels de 1926 à 2005



que celui trouvé, jusqu'à un horizon de 40 mois, par Peters pour le S&P 500 à New York (page 85 de son ouvrage référencé). Certes, le faible nombre de rendements mensuels disponibles de 1964 à 2005 réduit la signification de ces résultats, mais ils sont tout de même intéressants. En utilisant les autres intervalles de temps, nous avions un « coude » un horizon temporel entre 7 et 15 mois. À ce niveau de signification, celui de 16 mois pour les rendements mensuels est cohérent avec cette plage temporelle.

Revenant à la série mensuelle totale (1926-2005), pour mieux lever le doute sur le caractère gaussien ou non de la série, on a procédé à la technique du *bootstrap* sur ces données Le *bootstrap*, imaginé par B. Efron en 1979, consiste à tirer plusieurs échantillons, avec remise, dans la population d'origine et à calculer les estimateurs pour chaque échantillon. Au lieu de faire des hypothèses sur la distribution de la population, on crée, en quelque sorte, artificiellement, cette dernière à l'aide des échantillons. On observe alors ce qui se passe pour les estimateurs relatifs à chaque échantillon. Nous obtenons alors un intervalle de l'estimateur (*empirical percentile bootstrap*).

Afin de connaître l'intervalle de confiance du coefficient de Hurst, nous avons donc appliqué l'algorithme du *bootstrap* pour la série mensuelle du CAC 40 depuis janvier 1926 à juin 2005.

- Étape 1 : tirage de 152 échantillons (tirage aléatoire avec remise) à partir de la série des 967 valeurs du cac 40.
- Étape 2 : recherche pour chacun des 152 échantillons l'ensemble des statistiques, comme la moyenne *bootstrape*, l'écart type *bootstrape*... et le coefficient de Hurst *bootstrape*.

Ceci nous permet de calculer quel est l'intervalle autour de 0,5, hors duquel on peut considérer que le coefficient de Hurst H calculé est significativement différent de 0,5. Après calculs, cet intervalle de confiance est le suivant :

$$[0{,}5215 \; ; \; 0{,}5788]$$

Par conséquent, le coefficient de Hurst calculé pour la série globale de 1926 à 2005, qui est de H = 0,60, bien que relativement faible, n'appartient pas à l'intervalle *bootstrap* ; le processus étudié n'est donc clairement pas gaussien. Il reste à expliquer le fait qu'aucun « coude » n'apparaît sur cette série globale. Une raison peut venir du logiciel utilisé. Pour calculer le coefficient de Hurst, celui-ci commence par découper la série en « boîtes » égales à 10 unités en l'occurrence 10 mois (puis 11, 12.). Si l'horizon temporel, que l'on trouve égal à 16 mois sur une petite partie de la seconde sous-série (1964-2005) est inférieur à 10 mois sur la première sous-série (1926-1964), ce qui reste cohérent avec la plage de 7 à 15 mois dégagée sur les données infra-mensuelles, il est clair qu'il ne peut être saisi sur cette première sous-série. Les « boîtes » de 10 mois et plus masquent l'éventuel « coude » à 7, 8 ou 9 mois, ce qui gauchit évidemment le résultat sur la série entière. Ceci sera évidemment précisé si nous parvenons, comme indiqué plus haut, à travailler sur les séries hebdomadaires de 1926 à 2005.

On peut aussi discriminer une série, entre la loi de Gauss et une autre loi, en calculant le coefficient d'aplatissement de Pearson à l'aide des moments centrés μ d'ordre 2 et 4.

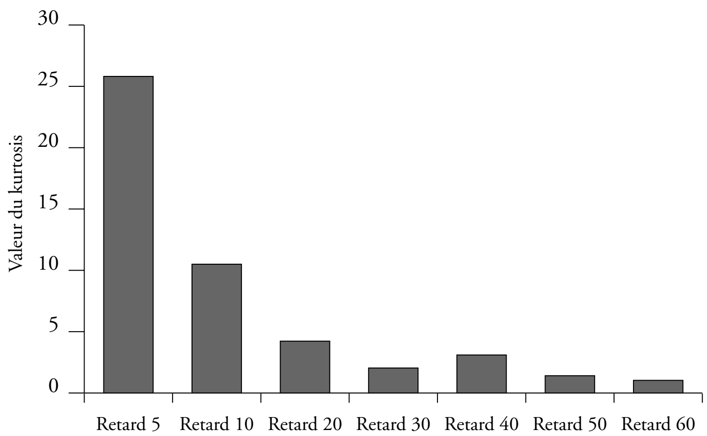
$$AP_p = \frac{\mu^4}{\mu_2^2}$$

qu'on appelle aussi le coefficient de kurtosis qui mesure la « forme plus ou moins aplatie » de la distribution des chiffres.
- Si $AP_P = 3$ alors la distribution est dite « normale » ou mésokurtique,
- Si $AP_P < 3$ alors la distribution est dite plus aplatie que la « normale » ou platykurtique,
- Si $AP_P > 3$ alors la distribution est dite moins aplatie que la « normale » ou leptokurtique.

Tableau n°2
Kurtosis sur la série journalière des rendements tirés des données journalières

Retards	Valeur kurtosis	nb points
Retard 5	25,810	1782
Retard 10	10,500	890
Retard 20	4,226	444
Retard 30	2,038	296
Retard 40	3,100	221
Retard 50	1,409	177
Retard 60	1,032	147

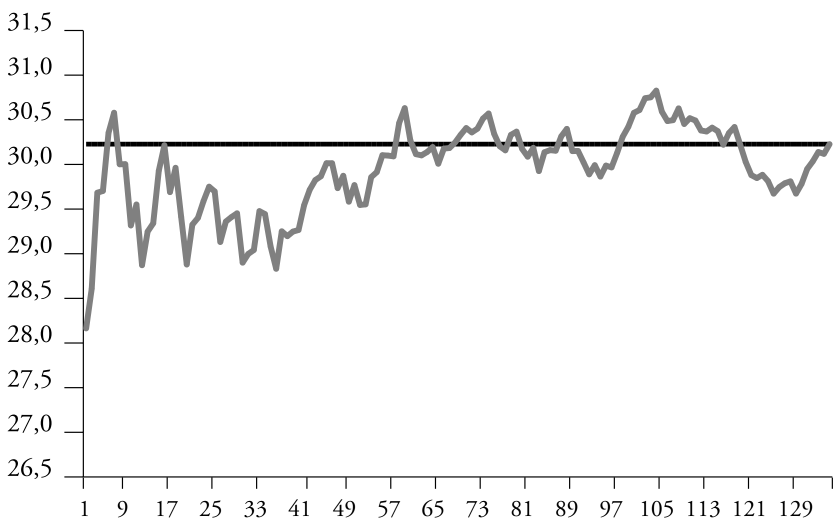
Graphique n°3
Étude du kurtosis des retards sur série journalière



Le coefficient de kurtosis de la loi Gauss est de 3. On voit clairement sur les séries journalières que les coefficients de kurtosis sont significativement différents de 3 pour les intervalles de calcul de rendement de 5 jours et 10 jours. Ils le sont moins au-delà. Mais pour les intervalles que nous avons précisément retenus comme pertinents avec le coefficient de Hurst, le coefficient de kurtosis confirme bien que la série n'est pas gaussienne.

Pour ce qui est des rendements mensuels, le kurtosis est de 30. Nous avons vérifié cette valeur par la technique du *bootstrap*. Le graphique suivant montre bien la convergence vers cette valeur.

Graphique n°4
Graphique de convergence du kurtosis « bootstrape »



Cependant nous avons calculé aussi les coefficients de kurtosis pour les deux sous-séries déjà évoquées 1926-1964 et 1965-2005. Les résultats sont indiqués dans les tableaux suivants.

La différence entre les deux coefficients de kurtosis est étonnante : 39 pour la première sous-période, 3,78, chiffre différent de 3, mais beaucoup plus faible, pour la première. On a vu plus haut que le coefficient de Hurst, global, non significatif pour cette seconde sous-période était de 0,5, donc qu'elle paraissait gaussienne, malgré une première partie présentant un coefficient de Hurst de 0,73 ; il n'est donc pas étonnant que son coefficient de kurtosis soit proche de 3. C'est encore un point qu'il faudra cependant éclaircir avec les données hebdomadaires.

Tableau n°3
Rendements mensuels du janvier 1965 à 2005

Rendements mensuels	
Moyenne	0,727185358
Écart type	6,094383693
Variance de l'échantillon	37,1415126
Kurstosis (Coefficient d'aplatissement)	3,780445018
Coefficient d'asymétrie	-0,031175
Plage	62,4257328
Minimum	-32,11253369
Maximum	30,31319911
Somme	361,411123
Nombre d'échantillons	497

Tableau n°4
Rendements mensuels du janvier 1926 à décembre 1964

Rendements mensuels	
Moyenne	1,146427868
Écart type	7,804296649
Variance de l'échantillon	60,90704619
Kurstosis (Coefficient d'aplatissement)	39,38225766
Coefficient d'asymétrie	3,815397356
Plage	121,6390373
Minimum	-33,57933579
Maximum	88,05970149
Somme	538,8210978
Nombre d'échantillons	470

Nous avons enfin tenté de calculer aussi les exposants de Lyapunov pour cet indice général de la Bourse de Paris. Ces coefficients permettent de confirmer le caractère chaotique ou non d'une série, de préciser si ce chaos est déterministe, et quelques autres caractéristiques. Pour en comprendre l'esprit, on peut imaginer un pétrin avec sa pâte ; on lâche sur celle-ci une goutte d'encre. Le mouvement du pétrin va provoquer un élargissement/éparpillement de la tâche ; on peut chercher à quelle vitesse s'écartent deux à deux, les deux, trois quatre... premières tâches sous l'action du pétrin.

Considérons, pour être plus proche, le cas d'un pendule. Le mouvement de ce pendule peut-être défini par la vitesse et l'angle de position, donc dans un plan (deux dimensions). Le point, qui a pour coordonnées les deux variables ci-dessus, décrit une trajectoire dans ce plan : une spirale s'il y a frottement, un cercle sans frottement. Le point vers lequel tend la spirale, ou le cercle, sont les « attracteurs » du mouvement.

Ils attirent les « orbites » successives. Supposons maintenant qu'une série répétitive, mais compliquée de chocs, perturbe le mouvement du pendule, par exemple en faisant bouger son support. La trajectoire va être évidemment compliquée même si, les chocs étant répétitifs, le mouvement du pendule « revient » finalement, après divers mouvements désordonnés toujours vers un « attracteur ». On peut considérer deux points de la trajectoire simple initiale et chercher à mesurer la vitesse à laquelle ils se séparent quand interviennent les chocs. C'est exactement ce que mesurent les exposants de Lyapunov. Plus précisément, selon la définition exacte, un exposant de Lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence ou de convergence de trajectoires voisines de l'espace des phases (les trajectoires des points définies par la vitesse et la position angulaire du pendule, dans l'espace à deux dimensions, après le choc perturbateur). Le nombre de coefficients de Lyapunov est égal à la « dimension » de l'attracteur, c'est-à-dire celle de l'espace dans lequel on décrit les trajectoires, le plan dans le cas du pendule.

Pour que la série sous étude relève du chaos déterministe, il faut qu'au moins un des exposants soit positif, mais, également, que la somme des coefficients de Lyapunov soit négative. En effet, dans le cas contraire, la trajectoire finirait par remplir tout l'espace dans lequel elle est immergée. On n'aurait alors plus un attracteur fini et le mouvement ressortirait de moins en moins à un mouvement soumis au chaos déterministe.

On démontre également que :

- si tous les exposants de Lyapunov sont positifs, il n'y a pas d'attracteur puisque les trajectoires finissent par remplir tout l'espace propre au phénomène, le plan, en l'occurrence, dans le cas du pendule ;
- s'ils sont tous négatifs, la sphère de conditions initiales va se contracter jusqu'à dégénérer en un point.

Les coefficients de Lyapunov, outre le caractère non gaussien de la série, permettent aussi, si le nombre de données est suffisant, d'approcher la « dimension » de l'attracteur, c'est-à-dire le nombre de facteurs du phénomène, en l'occurrence le cours. L'équivalent de la gravité et de la densité de l'air dans le cas du pendule !

Nous testons d'abord le caractère aléatoire contre le chaos déterministe de la Bourse de Paris, à partir de la série journalière du CAC 40.

Nous présentons ci-dessus les résultats[12], sur les données journalières, pour des intervalles de calcul des rendements croissant à de 1 à 20 jours.

Pour calculer les coefficients, on a recours à une méthode mise au point par deux mathématiciens, Ruelle et Taken, qui étudiaient les turbulences des fluides. Cette méthode s'applique lorsque, comme c'est

Tableau n°5
Exposants de Lyapunov sur rendements à divers intervalles

Nombre de points	8904	1782	891	446
Dimension reconstruction m=5	Rendements journaliers	Rendements de 5 jours en 5 jours	Rendements de 10 jours en 10 jours	Rendements de 20 jours en 20 jours
Exposants de Lyapunov	0,231548 0,0900364 -0,0534492 -0,243057 -0,701177	0,215335 0,060974 -0,0784526 -0,247735 -0,696963	0,20305 0,0631182 -0,062074 -0,258372 -0,640338	0,182996 0,0665734 -0,109781 -0,23675 -0,741999
Somme des exposants de Lyapunov	-0,676099	-0,746842	-0,694615	-0,838961
Dimension Kaplan-Yorke	4,03577	3,79866	3,78992	3,59045
Résultat	Chaos déterministe	Chaos déterministe	Chaos déterministe	Chaos déterministe

Dimension reconstruction m=4	Rendements journaliers	Rendements de 5 jours en 5 jours	Rendements de 10 jours en 10 jours	Rendements de 20 jours en 20 jours
Exposants de Lyapunov	0,157596 -0,0114997 -0,224301 -0,690661	0,0928728 -0,0658297 -0,266768 -0,71149	0,0725622 -0,0543727 -0,232346 -0,690653	0,0734555 -0,136214 -0,285909 -0,739356
Somme des exposants de Lyapunov	-0,768865	-0,951215	-0,904809	-1,08802
Dimension Kaplan-Yorke	2,65134	2,10137	2,07829	1,53926
Résultat	Chaos déterministe	Chaos déterministe	Chaos déterministe	Chaos déterministe

le cas de la série des cours, ou toute autre série statistique, on ne connaît pas les facteurs de cette série ; on ne dispose pas des séries correspondantes de ces facteurs. Les deux mathématiciens ont donc démontré, qu'on pouvait approcher le mécanisme causal en substituant à ces séries inconnues de facteurs, la série elle-même, retardée d'une, deux, trois périodes ou plus. Dans les tableaux ci-dessus, m indique le nombre de ces retards. La « dimension de plongement » ou « dimension de reconstruction », qui est la dimension dans laquelle on peut « faire tenir » l'attracteur de la série, qui est égale au nombre pertinent de coefficients de Lyapunov, est égale à ce nombre de retard, diminuée de un.

Nous n'avons gardé que les coefficients correspondant à des dimensions de plongement ou reconstruction de 3 (retard de 4 par la méthode de Ruelle et Taken) parce que la norme, en termes de données disponibles, pour que les coefficients de Lyapunov soient significatifs, est de disposer de 10^D données, soit, pour une dimension quatre, 10 000 données et pour une dimension trois, 1 000 données. Une valeur de m=5 correspondant à une dimension de Kaplan Yorke supérieure à 3, voire 4, exigeant 10 000 données, comme nous disposons au maximum de 8904 données, il paraît plus judicieux de choisir un retard inférieur, soit 4 correspondant à une dimension de 3 pour l'attracteur. Cela signifie que nous risquons évidemment de réduire artificiellement le nombre de facteurs, d'en oublier ou d'en « cumuler » de manières indistinctes un certain nombre, mais que nous sommes au moins sûrs de la signification statistique du nombre de facteurs que nous retenons.

Concrètement, si l'on considère par exemple, les cas des intervalles de rendements 5 jours et 10 jours (nous négligeons les rendements journaliers pour la raison déjà indiquée à propos du coefficient de Hurst) avec m=4, les coefficients de Lyapunov 0,0928728 et 0,0725622 signifient que le « cycle » au-delà duquel l'influence d'un point sur les suivants disparaît, le cycle « d'oubli », est de 10 « points » dans le premier cas (1/0,09287), de 14 points dans le second (1/0,07256). Cela signifie que le « cycle » est de 50 jours boursiers dans le premier cas, de 140 jours dans le second, soit, respectivement, 2 « mois bousiers » et demi et 7 mois. Même si ces chiffres sont différents des 7 à 15 mois mis en évidence à partir des coefficients de Hurst, ils sont bien du même ordre et très différents des 48 mois que Peters semble avoir mis en évidence par les deux méthodes pour l'indice S&P de New York.

Nous n'avons évidemment pas calculé les coefficients de Lyapunov pour les données mensuelles, compte tenu de l'insuffisance de données. Le travail doit donc être repris sur longue période, avec les données hebdomadaires.

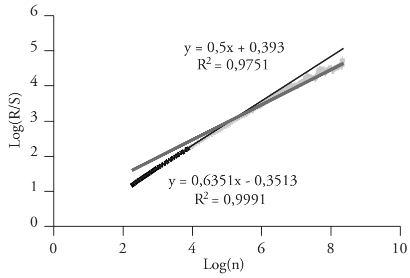
Malgré ses imperfections, cette étude conduit à conclure d'abord que quelle que soit la périodicité de saisie des cours, quotidienne (avec divers intervalles de calcul des rendements) ou mensuelle, la série n'est pas gaussienne. Elle n'est pas représentée de manière pertinente par une loi normale, ce qui invalide évidemment toutes les techniques de gestion de portefeuille fondées sur l'hypothèse gaussienne. En leurs lieux et places, mieux vaudrait appliquer les techniques suggérées par Mandelbrott et fondées sur la nature fractale, donc chaotique, du marché, tentant d'ajuster tel ou tel mécanisme multifractal au marché parisien, qui, à cet égard, ne se différencie pas des autres.

Seconde conclusion, puisque le chaos est déterministe, il y a un attracteur. Si l'on choisit la dimension 3 pour l'attracteur, premier entier supérieur au coefficient de Kaplan Yorke, celle qui donne un résultat proche de celui obtenu avec Hurst, il en résulte que trois « facteurs », au moins, seraient à l'œuvre sur la Bourse de Paris. On peut faire l'hypothèse que le premier serait celui des fondamentaux usuels : profits espérés, taux d'intérêt... et, derrière eux, leurs propres facteurs. Le second serait celui de l'action « ordinaire » des professionnels (distincte de l'action quotidienne que nous avons qualifiée plus haut de « compulsive » à l'origine du procès markovien sur les rendements journaliers) laquelle action « ordinaire » ramènerait vers l'attracteur. Enfin interviendrait spécifiquement à Paris, le marché de New York, dont l'influence est bien connue sur tous les marchés européens, et particulièrement celui de Paris. Il jouerait lui aussi le rôle de correcteur vers l'attracteur, expliquant du même coup - troisième conclusion de l'étude - que le cycle du marché de Paris, inférieur à 10 mois, de 5 à 7 mois, est plus court que celui mis en évidence par Peters, de 40 mois ou 1000 « jours » boursiers pour New York. La « mémoire » sur le marché de Paris, serait rendue plus « courte » que celle du marché de New York, justement par le « mimétisme » de la Bourse de Paris vis-à-vis de New York. Cette hypothèse doit toutefois encore être vérifiée sur d'autres données, notamment les rendements hebdomadaires réels (du vendredi au vendredi) qu'il faut distinguer des rendements de 5 jours en 5 jours sur cours journaliers, sur très longue période, et aussi, sur une ou deux actions particulières, dans la mesure où l'on dispose pour elles de séries de taille suffisantes.

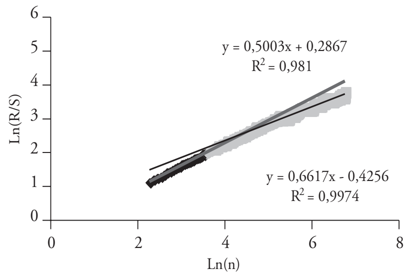
ANNEXES

Droites de régression pour le calcul du coefficient de Hurst

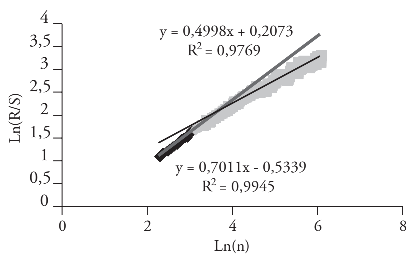
Graphique n°5
Droites de régression pour la série des rendements journaliers r=1



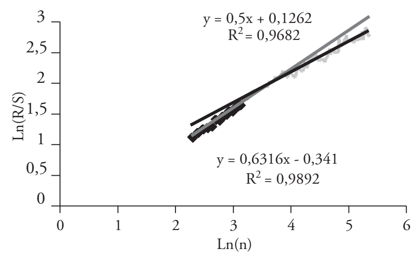
Graphique n°6
Droites de régression pour la série des rendements à cinq jours r=5



Graphique n°7
Droites de régression pour la série des rendements à dix jours (quinzaine) r=10



Graphique n°8
Droites de régression pour la série des rendements à 20 jours (mois boursier) r = 20



NOTES

1. *Une approche fractale des marchés*, Odile Jacob, 2005.

2. Écart entre le cours et une de ses moyennes mobiles, ou deux moyennes mobiles..., permettant effectivement d'anticiper au moins le sens du mouvement dans les prochaines périodes.

3. Brock, Dechert, Schneikmann,1987, « A test for independance based on the correlation dimension », *Economics review*, n° 15.
Hsieh,1991, « Chaos and non linear dynamics - Application to financial markets », *Journal of finance,* n° 46.
Lo,1991, « Long term memory in stock markets prices », *Econometrica*, n° 59.
Willey T., 1992, « Testing for non linear dependance in daily stock indices », *Journal of economics,* n° 44.
Brock, Hsieh and Lebaron, 1992, « Non linear dynamics chaos and instability », *MIT Press Cambridge.*
Peters, 1994, « Fractal market analysis - Applying chaos theory to investments and economics », *Wiley,* New York.
Alexandre, 1994, « Deux mesures de l'exposant de Lyapunov comme signal de chaos à la Bourse de Paris », *Journal de la société statistique de Paris n° 3.*
Girerd-Potin et O.Tamarasco, 1994, « Les rentabilités à la Bourse de Paris sont-elles chaotiques ? », *Revue économique,* n° 2.
Peters, 1996, « Chaos and order in the capital markets », *Wiley.*
Jacobson, 1996, « Long terms dependance in stocks return », *Journal of empirical finance,* n° 3.
Opong K., Mulholland A., Fox and K Farahmand, 1999, « The behavviour of some UK equity indices: an application of Hurst and BDS tests », *Journal of empirical finance,* n° 6.

4. *Dieu joue-t-il aux dés ?*, Steward, Champs, Flammarion, 1992, Publication initiale, Penguin books, Londres,1989.

5. *Essai philosophique sur les probabilités,*1776.

6. L*e chiffre de la vie,* Grégory Bénichou, Seuil, 2002.

7. « The coherent market hypothsis », *Financial analysts journal,* déc-janv 1991.

8. « A theory of social imitation », *Physics today,* n° 27, 1974.

9. « Le rôle des influences interpersonnelles dans la détermination des cours boursiers », *Revue économique,* n° 5, septembre 1990.

10. « La dynamique des marchés boursiers est-elle chaotique ? », *Journal de la société statistique de Paris,* 1997.

11. *Aspects non linéaires du marché des actions françaises,* Montréal-Cyrano, 2000.

12. Résultats obtenus sur le logiciel Dataplore.